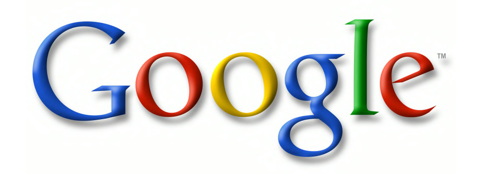


INTEGRATION

partieller Differential-Gleichungen.

Von

Prof. SIMON SPITZER.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1879.

INTEGRATION
partieller Differential-Gleichungen.

Von

Prof. SIMON SPITZER.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1879.

Vorrede.

Fast in allen, selbst den besten Lehrbüchern über höhere Mathematik ist das Gebiet der Integration partieller Differentialgleichungen stiefmütterlich behandelt. Ein Werk, das blos über die Integration partieller Differentialgleichungen handelt, gibt es nicht. Wohl erschien vor mehreren Jahren (1869) ein Werk, das von K. Hattendorff herausgegeben wurde, und das den Titel führt: »Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Vorlesungen von Bernhard Riemann.« Wie Alles, was Riemann leistete, bedeutend und mustergiltig ist, so ist es auch diese Arbeit. Sie hat nur einen Fehler, und das ist ihr Titel. Man kann dieses Werk nicht ein Werk über »Partielle Differentialgleichungen« nennen, es ist vielmehr ein Werk, das sich eingehend mit bestimmten Integralen, mit unendlichen Reihen, ferner mit zahlreichen Problemen der mathematischen Physik und analytischen Mechanik befasst, die schliesslich stets zu partiellen Differentialgleichungen führen, und die daselbst auch integrirt werden.

Wenn daher Jemand diesen Theil der Mathematik, nämlich die Integration partieller Differentialgleichungen studiren will, so ist er genöthigt, die Quellenwerke aufzusuchen, und das ist ziemlich mühsam.

Ich habe mir vorgenommen ein Werk zu schreiben über die Integration partieller Differentialgleichungen. Ich ging an die Arbeit. Aber nachdem ich mich lange mit diesem Theile der Mathematik beschäftigte, kam ich zur Einsicht, dass ein solches Werk, soll es vollständig sein, doch zu grosse Dimensionen annehmen würde, und dass es ein Wagniss sei, ein so

grosses Werk, das schliesslich doch nur auf eine geringe Anzahl von Lesern angewiesen ist, zu publiciren.

Ich arbeitete daher das zum grossen Theil bereits geschriebene Werk um, und publicire hier nur den Anfang desselben.

Sollte dieser Beifall finden, so gehe ich dann gerne an die Herausgabe der Fortsetzung desselben.

Bevor ich diese Vorrede schliesse, will ich nur erwähnen, dass ich mich veranlasst sehe, im Anhange dieses Werkes einen abermaligen Angriff des Prof. Anton Winckler auf meine in den Jahren 1860 und 1861 publicirten „Studien über Integration linearer Differentialgleichungen“ zurückzuweisen.

Prof. **Simon Spitzer.**

Einleitung.

Wir stellen uns in diesem Werke die Aufgabe die Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei unabhängig Variablen x und y und Einer von diesen abhängigen Variablen z zu lehren. Ist nämlich z eine Function von x und y, so kann man z partiell nach x und partiell nach y differenziren. Ist sodann eine Gleichung gegeben, in welche x, y, z, ferner $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ vorkömmt, z. B.

$$\varphi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dz}{dy}\right)=0$$

so nennt man eine solche Gleichung eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung, wird das z mehr als einmal nach x und nach y differenzirt und hat man eine Gleichung gegeben, in welcher x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ vorkömmt, so nennt man eine solche Gleichung, welche somit die Gestalt

$$\varphi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dz}{dy},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dxdy},\ \frac{d^2z}{dy^2}\right)=0$$

hat, eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung u. s. w.

Die Aufgabe, deren Lösung in diesem Werke versucht wird, ist nun die, für z eine solche Function von x und y zu finden, welche einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung identisch Genüge leistet.

Die Auflösung des Problems „partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung zu integriren“ ist den Mathematikern vollständig geglückt. Euler und Lagrange, sowie Pfaff und Jacobi haben sich um diesen Theil der Wissenschaft unvergängliche Verdienste erworben.

Man ist mit den partiellen Differentialgleichungen der zweiten oder gar der höheren Ordnung leider noch nicht so weit gekommen, dass man sagen könnte, ihre Auflösung sei in allen Fällen geglückt. Wohl sind die Verdienste, die sich Euler, d'Alembert, Lagrange, Monge, Legendre, Laplace, Poisson, Lobatto und andere um diesen Zweig der Analyse erworben,

nicht gering, doch ist man gegenwärtig noch sehr weit entfernt von der vollständigen Lösung dieses Problems.

Bevor wir auf den Gegenstand, dem dieses Werk gewidmet ist, näher eingehen, sind wir genöthigt, vorauszusetzen, dass sich alle Gleichungen der Form

$$P\,dx + Q\,dy = 0,$$

woselbst P und Q beliebige Functionen von x und y sind, integriren lassen, wenn es uns auch sehr schwer, ja in vielen Fällen sogar unmöglich wird, die sich bei diesem Integrationsgeschäfte darbietenden Schwierigkeiten zu überwinden. Es ist dies so der Gang der Wissenschaft. Derjenige, der es unternimmt, die Integration partieller Differentialgleichungen zu lehren, muss sich erlauben, die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen von jeder Ordnung als möglich und als bekannt vorauszusetzen, so wie derjenige, der es mit der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zu thun hat, zufrieden sein muss, wenn er sein Problem auf die Integration von Ausdrücken der Form

$$\int \varphi(x)\,dx$$

zurückgeführt hat.

Erster Abschnitt.

Betrachtungen über Differentialgleichungen der Form

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \tag{1}$$

§. 1.

Bevor wir zur Integration partieller Differentialgleichungen schreiten, betrachten wir Differentialgleichungen der Form (1), welche man totale Differentialgleichungen nennt

$$P, Q, R$$

bedeuten bestimmte Functionen von x, y, z.

Es entsteht vor Allem die Frage: Was heisst das, die Gleichung (1) sei zu integriren?

Man kann diese Frage in doppeltem Sinne beantworten.

Die Gleichung (1) integriren heisst:

Erstens, eine solche Function z von x und y — wenn möglich — zu finden, welche in die Gleichung (1) substituirt, derselben identisch Genüge leistet. (In diesem Sinne fasste Euler die Integration der Gleichung (1) auf.)

Zweitens, für y und z solche Functionen von x zu finden, welche in die Gleichung (1) substituirt, derselben identisch Genüge leisten. (Diese Auffassung rührt von Monge her, siehe Lacroix's Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 2. Band, Seite 690.)

Im ersten Falle stellt

$$z = F(x, y)$$

welches der Gleichung (1) genügt, geometrisch construirt eine Fläche vor, im zweiten Falle, in welchem

$$y = \varphi(x)$$
$$z = \psi(x)$$

in die Gleichung (1) substituirt, dieselbe identisch erfüllt, erhält man, diese Gleichungen geometrisch construirend, eine Linie.

1*

Dass im zweiten Falle unendlich viele Auflösungen möglich sind, ist klar. Man kann nämlich die Gleichung

$$y = \varphi(x)$$

ganz willkürlich annehmen, und sodann diesen Werth von y in (1) substituiren. Auf diese Weise gelangt man zu einer Gleichung, in welcher blos zwei Variable x und z erscheinen, welche sich daher vorausgesetztermassen integriren lässt, und demnach das z ebenfalls als Function von x liefert.

Die Aufgabe, die wir zunächst zu lösen uns vornehmen, besteht daher darin, die Gleichung (1) in dem Sinne zu integriren, dass man für z — wenn möglich — eine solche Function von x und y suche, welche derselben Genüge leistet, weil die Aufgabe, in dem zweiten Sinne aufgefasst, ja gar keine Schwierigkeiten darbietet.

Wir folgen hiebei vornehmlich dem Vorgange Euler's, der diese Aufgabe zuerst löste. (Siehe Euler's vollständige Anleitung zur Integralrechnung. Aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzt von Salomon. 3. Band, Seite 3.)

§. 2.

Ist die vorgelegte Gleichung

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \tag{1}$$

ein vollständiges Differential, d. h. ist sie entstanden durch Differenzirung einer Gleichung der Form

$$\varphi(x, y, z) = C$$

woselbst C eine willkürliche Constante bedeutet, so haben

$$P, Q, R$$

offenbar nachstehende Bedeutung:

$$P = \frac{d\varphi(x, y, z)}{dx}, \quad Q = \frac{d\varphi(x, y, z)}{dy}, \quad R = \frac{d\varphi(x, y, z)}{dz}$$

und es folgen aus diesen Gleichungen durch Differentiation:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dy} &= \frac{d^2\varphi(x, y, z)}{dx\,dy}, & \frac{dP}{dz} &= \frac{d^2\varphi(x, y, z)}{dx\,dz} \\
\frac{dQ}{dx} &= \frac{d^2\varphi(x, y, z)}{dx\,dy}, & \frac{dQ}{dz} &= \frac{d^2\varphi(x, y, z)}{dy\,dz} \\
\frac{dR}{dx} &= \frac{d^2\varphi(x, y, z)}{dx\,dz}, & \frac{dR}{dy} &= \frac{d^2\varphi(x, y, z)}{dy\,dz}
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich, wie man sieht, nachstehende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dQ}{dz} &= \frac{dR}{dy} \\
\frac{dR}{dx} &= \frac{dP}{dz} \\
\frac{dP}{dy} &= \frac{dQ}{dx}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und hieraus ergibt sich folgender merkwürdige Lehrsatz:

Wenn der Ausdruck

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

ein vollständiges Differential ist, so müssen zwischen P, Q und R nachstehende drei Bedingungsgleichungen stattfinden:

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}; \quad \frac{dR}{dx} = \frac{dP}{dz}; \quad \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \tag{2}$$

So ist z. B. der erste Theil der Gleichung

$$\left(z + \frac{1}{y}\right) dx - \frac{x}{y^2} dy + xdz = 0$$

ein vollständiges Differential, denn da

$$P = z + \frac{1}{y}$$
$$Q = -\frac{x}{y^2}$$
$$R = x$$

ist, so folgt:

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{dP}{dz} = 1$$
$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{dQ}{dz} = 0$$
$$\frac{dR}{dx} = 1 \quad \frac{dR}{dy} = 0$$

es finden daher in der That in diesem Falle die drei Gleichungen (2) statt.

Es ist leicht einzusehen, dass die Gleichung

$$\left(z + \frac{1}{y}\right) dx - \frac{x}{y^2} dy + xdz = 0$$

sich so schreiben lässt:

$$d\left(\frac{x}{y} + xz\right) = 0$$

und daher für jenen Werth von z befriedigt wird, der sich aus der Gleichung

$$\frac{x}{y} + xz = C$$

ergibt, in welcher C eine willkürliche Constante bezeichnet.

§. 3.

Wird die eben in Betracht gezogene Gleichung

$$\left(z + \frac{1}{y}\right) dx - \frac{x}{y^2} dy + xdz = 0$$

deren erster Theil, wie wir wissen, ein vollständiges Differential ist, von Brüchen befreit, so erhält man:

$$(y^2 z + y)\, dx - xdy + xy^2\, dz = 0$$

und nun tritt der merkwürdige Fall ein, dass der erste Theil dieser Gleichung kein vollständiges Differential mehr ist, denn man hat in diesem Falle:

$$P = y^2 z + y$$
$$Q = -x$$
$$R = xy^2$$

ferner hat man:

$$\frac{dP}{dy} = 2yz + 1 \qquad \frac{dP}{dz} = y^2$$
$$\frac{dQ}{dx} = -1 \qquad \frac{dQ}{dz} = 0$$
$$\frac{dR}{dx} = y^2 \qquad \frac{dR}{dy} = 2xy$$

und nun finden die drei Gleichungen (2) nicht mehr statt.

Man sieht hieraus, dass eine totale Differentialgleichung, deren erster Theil ein vollständiges Differential ist, sehr leicht diese Eigenschaft — ein vollständiges Differential zu sein — verliert, und dass schon das blosse Multipliciren einer solchen Gleichung mit einem variablen Factor hinreicht, um eine Gleichung, deren erster Theil ein vollständiges Differential ist, in eine andere umzuwandeln, bei welcher dies nicht der Fall ist.

Integration der totalen Differentialgleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ unter der Voraussetzung, dass zwischen P, Q, R nachstehende drei Gleichungen stattfinden:

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}, \quad \frac{dR}{dx} = \frac{dP}{dz}, \quad \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \tag{2}$$

§. 4.

Ist

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

ein vollständiges Differential, etwa das Differential von $\varphi(x, y, z)$ so hat man:

$$d\varphi(x, y, z) = Pdx + Qdy + Rdz$$

man erhält aber durch wirkliches Differenziren von $\varphi(x, y, z)$ folgenden Werth:

$$d\varphi(x, y, z) = \frac{d\varphi(x, y, z)}{dx}dx + \frac{d\varphi(x, y, z)}{dy}dy + \frac{d\varphi(x, y, z)}{dz}dz$$

Folglich hat man

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(x, y, z)}{dx} &= P \\ \frac{d\varphi(x, y, z)}{dy} &= Q \\ \frac{d\varphi(x, y, z)}{dz} &= R \end{aligned} \tag{3}$$

Nehmen wir vorerst die erste dieser drei Gleichungen, d. i. die Gleichung

$$\frac{d\varphi(x, y, z)}{dx} = P$$

vor, so folgt aus selber durch Multiplication mit dx und hierauf vorgenommener Integration

$$\varphi(x, y, z) = \int Pdx + A \tag{4}$$

und hiebei ist zu beachten:

Erstens, dass bei der Berechnung von

$$\int P\,dx$$

x allein als variabel anzusehen ist, somit die etwa in P vorkommenden y und z wie Constante zu behandeln sind.

Zweitens, dass die Integrationsconstante A blos bezüglich x constant ist, bezüglich y und z aber willkürlich beschaffen sein kann.

Demnach gestattet die Gleichung (4) folgende Schreibweise:

$$\varphi(x, y, z) = \int P\,dx + \psi(y, z) \tag{5}$$

und führt, partiell nach x differenzirt, wieder zur Gleichung

$$\frac{d\varphi(x, y, z)}{dx} = P$$

zurück, aus welcher sie durch Integration hervorging.

Jetzt handelt es sich zunächst um die Bestimmung von $\psi(y, z)$. Zu dem Zwecke differenzire man die Gleichung (5) partiell nach y, man erhält hiedurch

$$\frac{d\varphi(x, y, z)}{dy} = \int \frac{dP}{dy}\,dx + \frac{d\psi(y, z)}{dy}$$

Nun ist aber vermöge der zweiten Gleichung des Gleichungssystems (3)

$$\frac{d\varphi(x, y, z)}{dy} = Q$$

folglich hat man

$$Q = \int \frac{dP}{dy}\,dx + \frac{d\psi(y, z)}{dy}$$

und hieraus folgt zunächst

$$\frac{d\psi(y, z)}{dy} = Q - \int \frac{dP}{dy}\,dx$$

Wird diese Gleichung mit dy multiplicirt und sodann beiderseits integrirt, so erhält man

$$\psi(y, z) = \int \left[Q - \int \frac{dP}{dy}\,dx\right] dy + B \tag{6}$$

hier ist nun wieder zu beachten:

Erstens, dass weil $\psi(y, z)$ kein x in sich enthält, auch der zweite Theil dieser Gleichung gehörig reducirt, kein x in sich enthalten kann, weil sonst die eben aufgestellte Gleichung etwas widersprechendes aussagen würde, nämlich, dass eine Function von y und z identisch gleich sei einer Function, in welcher ausser y und z noch die Variable x erscheint;

Zweitens, dass, wenn man den Ausdruck

$$Q - \int \frac{dP}{dy}\,dx$$

mit dy multiplicirt, und sodann integrirt, hiebei y allein als variabel anzusehen, somit z wie eine Constante zu behandeln ist; endlich

Drittens, dass B ein Ausdruck ist, in welchem weder x noch y, wohl aber z, und zwar in beliebiger Form vorkommen kann.

Die Gleichung (6) gestattet demnach folgende Schreibweise:

$$\psi(y, z) = \int\left[Q - \int\frac{dP}{dy}\,dx\right]dy + \chi(z)$$

hiedurch geht dann die Gleichung (5) über in

$$\varphi(x, y, z) = \int P\,dx + \int\left[Q - \int\frac{dP}{dy}\,dx\right]dy + \chi(z) \tag{7}$$

und nun handelt es sich nur noch um die Bestimmung von $\chi(z)$.

Zu dem Zwecke differenziren wir die eben aufgestellte Gleichung (7) nach z, man erhält alsdann:

$$\frac{d\varphi(x, y, z)}{dz} = \int\frac{dP}{dz}\,dx + \int\left[\frac{dQ}{dz} - \int\frac{d^2P}{dy\,dz}\,dx\right]dy + \frac{d\chi(z)}{dz}$$

Beachtet man nun, dass vermöge der dritten Gleichung des Gleichungssystemes (3)

$$\frac{d\varphi(x, y, z)}{dz} = R$$

ist, so erhält man:

$$R = \int\frac{dP}{dz}\,dx + \int\left[\frac{dQ}{dz} - \int\frac{d^2P}{dy\,dz}\,dx\right]dy + \frac{d\chi(z)}{dz}$$

und hieraus folgt:

$$\frac{d\chi(z)}{dz} = R - \int\frac{dP}{dz}\,dx - \int\left[\frac{dQ}{dz} - \int\frac{d^2P}{dy\,dz}\,dx\right]dy$$

woraus sich $\chi(z)$ ergibt. Es ist nämlich:

$$\chi(z) = \int\left\{R - \int\frac{dP}{dz}\,dx - \int\left[\frac{dQ}{dz} - \int\frac{d^2P}{dy\,dz}\,dx\right]dy\right\}dz + C$$

woselbst C eine willkürliche Constante repräsentirt.

Man erhält also, wenn man diesen Werth von $\chi(z)$ in die Gleichung (7) einführt, nachstehenden Werth von $\varphi(x, y, z)$

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) = {} & \int P\,dx + \\ & + \int\left[Q - \int\frac{dP}{dy}\,dx\right]dy + \\ & + \int\left\{R - \int\frac{dP}{dz}\,dx - \int\left[\frac{dQ}{dz} - \int\frac{d^2P}{dy\,dz}\,dx\right]dy\right\}dz + C\end{aligned} \tag{8}$$

§. 5.

Wir wollen nun ein Beispiel durchführen und Schritt für Schritt den Weg gehen, den wir im vorhergehenden Paragraph eingeschlagen haben.

Sei gegeben die totale Differentialgleichung:

$$(2xy + 3yz + 1)\,dx + (x^2 + 3xz + 10yz^2)\,dy + (3xy + 10y^2z)\,dz = 0$$

so haben P, Q, R nachstehende Werthe:

$$P = 2xy + 3yz + 1$$
$$Q = x^2 + 3xz + 10yz^2$$
$$R = 3xy + 10y^2z$$

ferner hat man

$$\frac{dP}{dy} = 2x + 3z, \quad \frac{dP}{dz} = 3y$$
$$\frac{dQ}{dx} = 2x + 3z, \quad \frac{dQ}{dz} = 3x + 20yz$$
$$\frac{dR}{dx} = 3y, \quad \frac{dR}{dy} = 3x + 20yz$$

Aus diesen Gleichungen sieht man, dass für das vorgelegte Beispiel die drei Gleichungen (2) erfüllt sind.

Es ist somit

$$\frac{d\varphi(x, y, z)}{dx} = 2xy + 3yz + 1$$
$$\frac{d\varphi(x, y, z)}{dy} = x^2 + 3xz + 10yz^2 \quad (9)$$
$$\frac{d\varphi(x, y, z)}{dz} = 3xy + 10y^2z$$

Aus der ersten dieser drei Gleichungen folgt:

$$\varphi(x, y, z) = \int (2xy + 3yz + 1)\, dx$$

und wird die Integration nach x durchgeführt, so erhält man:

$$\varphi(x, y, z) = x^2y + 3xyz + x + \psi(y, z)$$

eine Gleichung, welche der Gleichung (5) im vorhergehenden Paragraph entspricht.

Wird nun die so eben erhaltene Gleichung beiderseits nach y differenzirt, so erhält man:

$$\frac{d\varphi(x, y, z)}{dy} = x^2 + 3xz + \frac{d\psi(y, z)}{dy}$$

und setzt man in diese statt dem ersten Theile der Gleichung seinen in (9) aufgestellten Werth

$$x^2 + 3xz + 10yz^2$$

so erhält man

$$x^2 + 3xz + 10yz^2 = x^2 + 3xz + \frac{d\psi(y, z)}{dy}$$

oder reducirt

$$10yz^2 = \frac{d\psi(y, z)}{dy}$$

hieraus ergibt sich

$$\psi(y, z) = 10 \int yz^2\, dy$$

und wenn man auf der rechten Seite der Gleichung die Integration durchführt:

$$\psi(y, z) = 5y^2z^2 + \chi(z)$$

und dies ist die Gleichung, welche der Gleichung (6) im vorhergehenden Paragraph entspricht. Demnach ist nun

$$\varphi(x, y, z) = x^2y + 3xyz + x + 5y^2z^2 + \chi(z)$$

Differenzirt man nun zur Bestimmung von $\chi(z)$ diese Gleichung beiderseits nach z, so erhält man

$$\frac{d\varphi(x, y, z)}{dz} = 3xy + 10y^2z + \frac{d\chi(z)}{dz}$$

oder wenn man für den ersten Theil der Gleichung seinen in (9) stehenden Werth setzt:

$$3xy + 10y^2z = 3xy + 10y^2z + \frac{d\chi(z)}{dz}$$

hieraus folgt

$$\frac{d\chi(z)}{dz} = 0$$

folglich ist $\chi(z)$ constant, und sonach ist

$$\varphi(x, y, z) = x^2y + 3xyz + x + 5y^2z^2 + C$$

Differenzirt man diese Gleichung, so erhält man in der That

$$d(x^2y + 3xyz + x + 5y^2z^2 + C) =$$
$$(2xy + 3yz + 1)\,dx + (x^2 + 3xz + 10yz^2)\,dy + (3xy + 10y^2z)\,dz$$

Wollte man die Gleichung

$$(2xy + 3yz + 1)\,dx + (x^2 + 3xz + 10yz^2)\,dy + (3xy + 10y^2z)\,dz = 0$$

mittelst der Formel (8) integriren, so hätte man in (8) zu setzen

$$P = 2xy + 3yz + 1$$
$$Q = x^2 + 3xz + 10yz^2$$
$$R = 3xy + 10y^2z$$

ferner

$$\frac{dP}{dy} = 2x + 3z$$
$$\frac{dP}{dz} = 3y$$
$$\frac{dQ}{dz} = 3x + 20yz$$
$$\frac{d^2P}{dydz} = 3$$

es ist dann

$$\varphi(x, y, z) = \int(2xy + 3yz + 1)\,dx +$$
$$+\int[x^2 + 3xz + 10yz^2 - \int(2x + 3z)\,dx]\,dy +$$
$$+\int\Big\{3xy + 10y^2z - \int 3y\,dx - \int[3x + 20yz - \int 3\,dx]\,dy\Big\}\,dz + C$$

hieraus folgt zunächst

$$\varphi(x, y, z) = x^2y + 3xyz + x +$$
$$+\int[x^2 + 3xz + 10yz^2 - x^2 - 3xz]\,dy +$$
$$+\int\Big\{3xy + 10y^2z - 3xy - \int[3x + 20yz - 3x]\,dy\Big\}\,dz + C$$

hieraus folgt weiter

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + 3xyz + x + \int 10 y z^2 dy +$$
$$+ \int \left\{ 10 y^2 z - \int 20 yz\, dy \right\} dz + C$$

hieraus folgt nun

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + 3\, xyz + x + 5\, y^2 z^2 + \int \left\{ 10 y^2 z - 10 y^2 z \right\} dz + C$$

und schliesslich ist

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + 3xyz + x + 5 y^2 z^2 + C$$

was wir auch früher fanden.

Weitere Betrachtungen über die totalen Differentialgleichungen

$$P dx + Q dy + R dz = 0 \tag{1}$$

§. 6.

Wenn der Ausdruck (1) kein vollständiges Differential ist, so ist der Gedanke, der sich zunächst darbietet, der, ob es vielleicht möglich ist, diesen Ausdruck durch Multiplication mit einer Function von x, y, z in ein vollständiges Differential zu verwandeln.

Sei M eine solche, einstweilen unbekannte Function von x, y, z und versuchen wir nun, ob es nicht möglich ist, M so zu bestimmen, dass der Ausdruck

$$MP\, dx + MQ\, dy + MR\, dz$$

ein vollständiges Differential werde.

Soll nun der eben genannte Ausdruck durch Differenziren einer Function von x, y, z entstanden sein, so müssen vermöge des in §. 2 aufgestellten Lehrsatzes folgende drei Gleichungen stattfinden.

$$\begin{aligned} \frac{d(MQ)}{dz} &= \frac{d(MR)}{dy} \\ \frac{d(MR)}{dx} &= \frac{d(MP)}{dz} \\ \frac{d(MP)}{dy} &= \frac{d(MQ)}{dx} \end{aligned} \tag{10}$$

Werden diese drei Gleichungen entwickelt, so erhält man:

$$\begin{aligned} M\frac{dQ}{dz} + Q\frac{dM}{dz} &= M\frac{dR}{dy} + R\frac{dM}{dy} \\ M\frac{dR}{dx} + R\frac{dM}{dx} &= M\frac{dP}{dz} + P\frac{dM}{dz} \\ M\frac{dP}{dy} + P\frac{dM}{dy} &= M\frac{dQ}{dx} + Q\frac{dM}{dx} \end{aligned}$$

und diese Gleichungen führen, wenn man die erste derselben mit P, die zweite mit Q, die dritte mit R multiplicirt, zu folgenden Gleichungen

$$MP\frac{dQ}{dz} + PQ\frac{dM}{dz} = MP\frac{dR}{dy} + PR\frac{dM}{dy}$$
$$MQ\frac{dR}{dx} + QR\frac{dM}{dx} = MQ\frac{dP}{dz} + PQ\frac{dM}{dz}$$
$$MR\frac{dP}{dy} + PR\frac{dM}{dy} = MR\frac{dQ}{dx} + QR\frac{dM}{dx}$$

Addirt man diese drei Gleichungen, und lässt man beiderseits die gleichen, somit sich aufhebenden Ausdrücke weg, so erhält man die Gleichung

$$M\left(R\frac{dP}{dy} + P\frac{dQ}{dz} + Q\frac{dR}{dx}\right) = M\left(R\frac{dQ}{dx} + P\frac{dR}{dy} + Q\frac{dP}{dz}\right)$$

welche geordnet, folgende Gestalt annimmt:

$$M\left[P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)\right] = 0$$

Aus dieser Gleichung, welche eine blosse Folge der drei Gleichungen (10) ist, lässt sich M nicht finden. Dividirt man dieselbe durch M — und dies ist gestattet, weil M nicht gleich Null ist — so erhält man:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0 \tag{11}$$

und diese Gleichung — in welcher blos P, Q, R erscheinen — kann stattfinden oder nicht. Findet sie identisch statt, so gibt es einen x, y, z erhaltenden Factor, welcher mit

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

multiplicirt, dieses Product integrabel macht; findet die Gleichung (11) nicht identisch statt, so gibt es keinen x, y, z enthaltenden Factor, welcher mit

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

multiplicirt, einen integrablen Ausdruck liefert.

§. 7.

Im vorhergehenden Paragraph haben wir uns die Aufgabe gestellt, wenn möglich, einen x, y, z enthaltenden Factor M — welchen man den integrirenden Factor nennt — zu suchen, welcher mit

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

multiplicirt, ein vollständiges Differential gibt.

Wir haben diese Aufgabe nicht gelöst, wir haben nämlich ein solches M nicht gefunden. Unsere Analyse war aber deshalb keine nutzlose, denn wir sind durch selbe zu einem höchst merkwürdigen Satze geleitet worden, welcher folgendermassen lautet:

Soll der Ausdruck

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

welcher kein vollständiges Differential ist, durch Multiplication mit einem x, y, z enthaltenden Factor M zu einem vollständigen Differential gemacht

werden können, so muss zwischen den drei Grössen P, Q, R folgende Gleichung bestehen:

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0 \qquad (11)$$

Einige Beispiele mögen zur Erläuterung dienen:

1. Lässt sich der Ausdruck

$$z\,dx + x\,dy + y\,dz$$

durch Multiplication mit einem x, y, z enthaltenden Factor M integrabel machen?

In diesem Beispiele ist

$$P = z, \quad Q = x, \quad R = y$$

folglich hat man:

$$\frac{dQ}{dz} = 0, \quad \frac{dR}{dy} = 1, \quad \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} = -1$$
$$\frac{dR}{dx} = 0, \quad \frac{dP}{dz} = 1, \quad \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} = -1$$
$$\frac{dP}{dy} = 0, \quad \frac{dQ}{dx} = 1, \quad \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} = -1$$

und es ist der Ausdruck

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)$$

für die, in diesem speciellen Beispiele gegebenen Werthe von P, Q, R nicht gleich Null, sondern gleich

$$-x - y - z$$

es lässt sich demnach kein Factor M finden, welcher mit

$$z\,dx + x\,dy + y\,dz$$

multiplicirt, auf ein vollständiges Differential führt.

2. Lässt sich der Ausdruck

$$(y + z)\,dx + 2\,(x + z)\,dy + (2\,x + y + 3z)\,dz$$

durch Multiplication mit einem x, y, z enthaltenden Factor integrabel machen?

Für diesen Fall ist:

$$P = y + z, \quad Q = 2x + 2z, \quad R = 2x + y + 3z$$

folglich hat man:

$$\frac{dQ}{dz} = 2, \quad \frac{dR}{dy} = 1, \quad \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} = 1$$
$$\frac{dR}{dx} = 2, \quad \frac{dP}{dz} = 1, \quad \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} = 1$$
$$\frac{dP}{dy} = 1, \quad \frac{dQ}{dx} = 2, \quad \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} = -1$$

und der Ausdruck

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)$$

welcher in diesem speciellen Falle gleich

$$(y + z) + (2\,x + 2\,z) - (2\,x + y + 3\,z)$$

ist, wird hiefür Null. Es existirt demnach ein Factor M, welcher mit

$$(y + z)\,dx + 2\,(x + z)\,dy + (2\,x + y + 3\,z)\,dz$$

multiplicirt, auf ein vollständiges Differentiale führt.

Integration der totalen Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{1}$$

unter der Voraussetzung, dass zwischen den drei Grössen P, Q, R die Gleichung

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0 \tag{11}$$

stattfindet.

§. 8.

Die Gleichungen der Form (1) lassen sich, wie wir gleich sehen werden, falls zwischen den drei Grössen P, Q, R die Gleichung (11) stattfindet, stets in dem Sinne integriren, dass es möglich ist, für z eine solche Function von x und y aufzufinden, welche in (1) substituirt, derselben Genüge leistet.

Wir nennen deshalb Gleichungen der Form (1), zwischen deren Coefficienten P, Q, R die Gleichung (11) stattfindet, integrable Differentialgleichungen.

Um solche Gleichungen zu integriren, verfährt man folgendermassen: Man abstrahirt vorerst von einer Veränderlichen, etwa von z, indem man sich einstweilen z constant, also $dz = 0$ denkt. Unter dieser Voraussetzung geht die Gleichung (1) über in

$$Pdx + Qdy = 0$$

und diese lässt sich, weil in selber nun blos die Variablen x und y vorkommen, vorausgesetztermassen integriren. Das Integrale dieser Gleichung wird offenbar eine willkürliche Constante C enthalten, wird also von der Form

$$f(x,\ y,\ z,\ C) = 0$$

sein. Nehmen wir an, dass dieselbe nach y aufgelöst werde, und

$$y = \varphi\,(x,\ z,\ C)$$

liefere. Sodann kehren wir zur vorgelegten Gleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{1}$$

welche die drei Variablen x, y, z enthält, zurück, und führen in selbe für y eine neue Variable C ein, mittelst der Substitution

$$y = \varphi\,(x,\ z,\ C)$$

und erhalten, da

$$dy = \frac{d\varphi\,(x,\ z,\ C)}{dx}\,dx + \frac{d\varphi\,(x,\ z,\ C)}{dz}\,dz + \frac{d\varphi\,(x,\ z,\ C)}{dC}\,dC$$

ist, statt der Gleichung (1) folgende andere Gleichung:

$$P_1\,dx + Q_1\left[\frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dz}\,dz + \frac{d\varphi}{dC}\,dC\right] + R_1\,dz = 0 \qquad (12)$$

in welcher statt $\varphi(x, z, C)$ der Kürze halber φ gesetzt ist, und in welcher

$$P_1\,,\quad Q_1\,,\quad R_1$$

diejenigen Functionen von x, z, C bedeuten, welche entstehen, wenn man in P, Q, R statt y die Substitution $y = \varphi(x, z, C)$ vollführt.

Die Gleichung (1) ist eine solche, welche integrabel ist — denn es findet ja, der Voraussetzung gemäss, zwischen den Coefficienten P, Q, R derselben die Gleichung (11) statt —; wird daher in dieselbe für y eine neue Variable eingeführt, so wird hiedurch offenbar der Charakter der Integrabilität der Gleichung nicht geändert, folglich ist auch die Gleichung (12) eine integrable, und diese erscheint, nach den Differentialen dx, dz, dC geordnet, in folgender Gestalt:

$$\left[P_1 + Q_1\frac{d\varphi}{dx}\right]dx + \left[Q_1\frac{d\varphi}{dz} + R_1\right]dz + Q_1\frac{d\varphi}{dC}\,dC = 0 \qquad (13)$$

Die Gleichung (1) wird identisch, wenn man in dieselbe für y die Substitution

$$y = \varphi(x, z, C)$$

macht und hiebei z und C als Constante ansieht — denn eben unter dieser Voraussetzung wurde ja das y gefunden —; demnach muss unter denselben Voraussetzungen auch die Gleichung (13) identisch werden.

Unter diesen Voraussetzungen, nämlich, dass z und C constant sind, wird

$$dz = 0\,,\quad dC = 0$$

folglich wird die Gleichung (13) übergehen in die Gleichung

$$\left[P_1 + Q_1\frac{d\varphi}{dx}\right]dx = 0$$

und diese muss identisch stattfinden. Aus ihr folgt durch Division mit dx die Gleichung

$$P_1 + Q_1\frac{d\varphi}{dx} = 0$$

Berücksichtigt man dieselbe, so vereinfacht sich die Gleichung (13) und geht über in

$$\left(Q_1\frac{d\varphi}{dz} + R_1\right)dz + Q_1\frac{d\varphi}{dC}\,dC = 0 \qquad (14)$$

§. 9.

Das im vorhergehenden Paragraphe Vorgetragene lässt sich mit wenig Worten folgendermassen wiedergeben:

„Wenn man in die Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \qquad (1)$$

für y eine neue Variable C einführt, mittelst der Substitution

$$y = \varphi(x, z, C)$$

so geht hiedurch die Gleichung (1) in folgende einfachere Gleichung:

$$\left(Q_1 \frac{d\varphi}{dz} + R_1\right) dz + Q_1 \frac{d\varphi}{dC} dC = 0 \tag{14}$$

über.«

Die Gleichung (1) setzten wir als integrabel voraus; die Gleichung (14) behaupteten wir, ist ebenfalls eine integrable, weil es nicht denkbar ist, dass eine Gleichung, welche integrabel ist, diesen Charakter durch Einführung einer neuen Variablen ändern sollte. Es muss demnach auch die Gleichung (14) eine integrable sein. Die Gleichung (14) ist aber eine Gleichung, in welcher drei Variable, nämlich x, z und C vorkommen. Da aber in derselben Gleichung nicht auch dx, dz und dC, sondern blos dz und dC erscheinen, so kann die Gleichung (14) nur dann eine integrable sein, wenn x entweder gar nicht in derselben vorkömmt, oder aber, wenn die beiden Glieder der Gleichung (14) nämlich

$$Q_1 \frac{d\varphi}{dz} + R_1 \quad \text{und} \quad Q_1 \frac{d\varphi}{dC}$$

einen gemeinschaftlichen x enthaltenden Factor haben, von welchem man die Gleichung (14) durch Dividiren mit demselben befreien kann. Ist dies der Fall, und dividirt man die Gleichung (14) durch den, beiden Gliedern der Gleichung gemeinschaftlichen x enthaltenden Factor, so kömmt man zu einer Gleichung, die blos z und C enthält, und die sich demnach integriren lässt.

Ist das Integrale derselben

$$F(z, C) = C_1$$

woselbst C_1 eine willkürliche Constante bedeutet, so ist dies zugleich das Integrale der vorgelegten Gleichung, wenn man nur in derselben statt C diejenige Function von x, y, z substituirt, welche sich aus der Gleichung

$$y = \varphi(x, z, C)$$

hiefür ergibt.

§. 10.

Einige Beispiele werden das eben Gesagte hinlänglich erläutern.

Welches ist das Integrale der Gleichung:

$$(y + z)\, dx + 2\,(x + z)\, dy + (2x + y + 3z)\, dz = 0$$

Um dasselbe zu finden, denken wir uns zuerst z constant, somit $dz = 0$; sodann erhalten wir die Gleichung

$$(y + z)\, dx + 2\,(x + z)\, dy = 0$$

in welcher blos x und y als Variable angesehen werden, und welche sich daher nach den bekannten Methoden integriren lässt. Es folgt nämlich aus derselben

$$\frac{dx}{2(x+z)} + \frac{dy}{y+z} = 0$$

durch Integration erhält man

$$\tfrac{1}{2} \log(x + z) + \log(y + z) = \log C$$

und wenn man aus dieser Gleichung die Logarithmen wegschafft

$$(x + z)(y + z)^2 = C^2$$

unter C eine willkürliche Constante verstanden. Aus ihr ergibt sich

$$y = -z + \frac{C}{\sqrt{x+z}}$$

Die Aufgabe, welche wir uns gestellt, war die, die Gleichung

$$(y + z)\,dx + 2(x + z)\,dy + (2x + y + 3z)\,dz = 0$$

zu integriren. Zu dem Zwecke führen wir in selbe für y eine neue Variable C ein, mittelst der Substitution

$$y = -z + \frac{C}{\sqrt{x+z}}$$

hieraus folgt durch Differenziren:

$$dy = -dz + \frac{2(x+z)\,dC - C(dx + dz)}{2(x+z)\sqrt{x+z}}$$

und werden diese Werthe von y und dy in die vorgelegte Gleichung substituirt, so erhält man:

$$\frac{C dx}{\sqrt{x+z}} + \left[-2(x+z)dz + \frac{2(x+z)dC - C(dx+dz)}{\sqrt{x+z}}\right] +$$
$$+ \left(2x + \frac{C}{\sqrt{x+z}} + 2z\right) dz = 0$$

woraus durch Reduction folgt:

$$2\sqrt{x+z}\;dC = 0$$

hieraus ergibt sich

$$dC = 0$$

folglich ist C eine willkürliche Constante, und das Integrale der vorgelegten Gleichung ist somit

$$(x + z)(y + z)^2 = C^2$$

Anmerkung. Aus den beiden Gleichungen

$$2\sqrt{x+z}\;dC = 0$$
$$(x + z)(y + z)^2 = C^2$$

folgt, durch Elimination von C

$$2\sqrt{x+z}\;d[(y+z)\sqrt{x+z}] = 0$$

und das ist nichts anderes, als die vorgelegte totale Differentialgleichung in anderer Form geschrieben. Aus ihr sieht man, dass man ihr genügen könne

erstens, wenn

$$(y + z)\sqrt{x+z} = C$$

gesetzt wird, unter C eine willkürliche Constante verstanden,

und zweitens, wenn

$$x + z = 0$$

angenommen wird.

Die erste Auflösung nennt man eine vollständige Lösung, die letztere, falls sie nicht durch Specialisirung der Constanten der vollständigen Lösung hervorgeht, eine singuläre Auflösung.

§. 11.

Welches ist das Integrale der nachstehenden integrablen Differentialgleichung

$$(y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz = 0$$

Um diese Gleichung zu integriren, denken wir uns vorerst z als constant, somit $dz = 0$, alsdann haben wir

$$(y+z)\,dx + (x+z)\,dy = 0$$

Diese Gleichung lässt sich folgendermassen schreiben:

$$\frac{dx}{x+z} + \frac{dy}{y+z} = 0$$

und gibt integrirt:

$$log\,(x+z) + log\,(y+z) = log\,C$$

woraus

$$(x+z)\,(y+z) = C$$

folgt, unter C eine willkürliche Constante verstanden. Aus der so eben gewonnenen Gleichung folgt:

$$y = -z + \frac{C}{x+z}$$

Nachdem wir dieses y gefunden, kehren wir zur vorgelegten Gleichung

$$(y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz = 0$$

zurück und führen in selbe statt y eine neue Variable C ein mittelst der Substitution

$$y = -z + \frac{C}{x+z}$$

hieraus folgt:

$$dy = -dz + \frac{(x+z)\,dC - C\,(dx+dz)}{(x+z)^2}$$

und die vorgelegte Gleichung geht über in:

$$\frac{Cdx}{x+z} - (x+z)\,dz + \frac{(x+z)\,dC - C\,(dx+dz)}{x+z} + (x-z)\,dz + \frac{Cdz}{x+z} = 0$$

Wird diese Gleichung reducirt, so erhält man:

$$-2z\,dz + dC = 0$$

und integrirt man nun, so erhält man

$$-z^2 + C = C_1$$

unter C_1 eine willkürliche Constante verstanden.

Setzt man hierein statt C seinen Werth $(x+z)\,(y+z)$ so erhält man

$$(x+z)\,(y+z) - z^2 = C_1$$

als Integrale der vorgelegten Gleichung; und diese gestattet folgende einfachere Schreibweise:

$$xy + xz + yz = C_1$$

Anmerkung. Verbindet man die Gleichung

$$-2z\,dz + dC = 0$$

welche sich auch so schreiben lässt:

$$d(-z^2 + C) = 0$$

mit der Gleichung

$$C = (x + z)(y + z)$$

so sieht man, dass die vorgelegte Gleichung folgende Aufschreibweise gestattet:

$$d[-z^2 + (x + z)(y + z)] = 0$$

und dies lässt sich folgendermassen schreiben:

$$d(xy + xz + yz) = 0$$

woraus abermals folgt, dass

$$xy + xz + yz = C_1$$

der vorgelegten Gleichung Genüge leistet.

Vereinfachung der eben vorgetragenen Integrations-Methode für totale Differentialgleichungen der Form

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \qquad (1)$$

zwischen deren Coefficienten die Gleichung

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0 \qquad (11)$$

stattfindet.

§. 12.

In den Paragraphen 8 und 9 haben wir der Wesenheit nach die Euler'sche Integrationsmethode für Gleichungen der Form (1) mitgetheilt[1]), wir zeigten daselbst, dass das Wesen dieser Methode darin besteht, für y eine neue Variable C einzuführen, und zwar mittelst der Gleichung

$$y = \varphi(x, z, C)$$

und dass durch Substitution dieses Ausdruckes in die vorgelegte Gleichung selbe die Gestalt:

$$\left(Q_1 \frac{d\varphi}{dz} + R_1\right) dz + Q_1 \frac{d\varphi}{dC} dC = 0 \qquad (14)$$

annimmt, aus welcher, falls in derselben x vorkömmt, selbes durch Division weggeschafft werden kann.

Man kann nun auf diesen wichtigen Umstand gleich im Laufe der Rechnung Rücksicht nehmen, und sie dem entsprechend vereinfachen.

Statt nämlich in die gegebene Gleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \qquad (1)$$

---

[1]) Euler gibt nicht die allgemeine Methode an, sondern er lehrt blos äusserst geschickt gewählte Beispiele integriren. Man sehe Euler's vollständige Anleitung zur Integralrechnung. Aus dem Lateinischen in's Deutsche übersetzt von Salomon. 3. Band, Seite 3. Ich werde in der Folge, falls ich dieses Werk citire, blos Band und Seite desselben anführen.

für y die Substitution

$$y = \varphi\,(x,\ z,\ C)$$

zu machen, setze man in beiden so eben aufgestellten Gleichungen $x = 0$, oder, falls diese Substitution Unbequemlichkeiten verursachen sollte, indem dadurch vielleicht manche Glieder unendlich werden, so setze man $x = 1$, oder $x = 2$, oder x gleich sonst einer beliebigen Zahl, man erhält sodann, da hiedurch $dx = 0$ wird, statt der Gleichung (1), die einfachere Gleichung

$$Q_0\,dy + R_0\,dz = 0$$

woselbst Q_0 und R_0 solche Functionen von y und z sind, welche aus Q und R entstehen, wenn man in denselben statt x Null setzt. Schreibt man sodann in der so eben aufgestellten vereinfachten Gleichung

$$y = \varphi\,(0,\ z,\ C)$$

so gelangt man zu einer Gleichung, welche der Wesenheit nach mit der Gleichung

$$\left(Q_1 \frac{d\varphi}{dz} + R_1\right) dz + Q_1 \frac{d\varphi}{dC}\, dC = 0 \tag{14}$$

übereinstimmt.

§. 13.

So hatten wir früher, um die Gleichung

$$(y + z)\,dx + 2\,(x + z)\,dy + (2x + y + 3z)\,dz = 0$$

zu integriren, in selbe für y eine neue Variable C eingeführt mittelst der Substitution

$$y = -z + \frac{C}{\sqrt{x+z}}$$

und kamen hiedurch auf die Gleichung

$$2\sqrt{x+z}\;dC = 0$$

woraus durch Division mit dem x enthaltenden Factor

$$dC = 0$$

folgt.

Würden wir in die gegebene Gleichung $x = 0$ setzen, so erhielten wir, da hiefür auch $dx = 0$ ist, statt derselben

$$2z\,dy + (y + 3z)\,dz = 0$$

und diese Gleichung geht durch Einführung einer neuen Variablen C mittelst der Substitution

$$y = -z + \frac{C}{\sqrt{z}}$$

über in

$$2z\left(-dz + \frac{2z\,dC - C\,dz}{2z\sqrt{z}}\right) + \left(\frac{C}{\sqrt{z}} + 2z\right) dz = 0$$

Diese liefert reducirt

$$2\sqrt{z}\;dC = 0$$

woraus ebenfalls

$$dC = 0$$

folgt.

Auf gleiche Weise fanden wir bei Gelegenheit der Integration der Gleichung

$$(y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz = 0$$

dass die Einführung einer neuen Variablen C mittelst der Gleichung

$$y = -z + \frac{C}{x+z}$$

auf die Gleichung

$$-2z\,dz + dC = 0$$

führte. Würde man in die gegebene Gleichung $x = 0$ und somit auch $dx = 0$ setzen, so erhielte man

$$z\,dy + y\,dz = 0$$

und setzt man hierein

$$y = -z + \frac{C}{z}$$

woselbst C eine neue Variable bezeichnet, so erhält man

$$z\left(-dz + \frac{z\,dC - C\,dz}{z^2}\right) + \left(-z + \frac{C}{z}\right)dz = 0$$

was reducirt ebenfalls auf

$$-2z\,dz + dC = 0$$

führt.

Integration der totalen Differentialgleichung

$$P dx + Q dy + R dz = 0 \qquad (1)$$

unter der Voraussetzung, dass P, Q, R homogene Functionen von x, y, z sind, und dass zwischen diesen Grössen die Gleichung

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0 \qquad (11)$$

stattfindet.

§. 14.

In dem Falle, in welchem die vorgelegte Differentialgleichung integrabel und homogen ist, kann man nach Euler (3. Band, Seite 23) auch folgenden Weg einschlagen, um zum Integrale der Gleichung (1) zu gelangen.

Man führe in die gegebene Gleichung für x und y neue Variable ξ und η ein, mittelst folgenden Substitutionen:

$$x = \xi z$$
$$y = \eta z$$

man erhält sodann, da P, Q und R homogen sind, für diese Grössen Ausdrücke von nachstehender Gestalt

$$P = z^n P_1$$
$$Q = z^n Q_1$$
$$R = z^n R_1$$

und hier bedeuten nun P_1, Q_1 und R_1 Functionen, die blos ξ und η enthalten.

Da nun

$$dx = \xi\, dz + z\, d\xi$$
$$dy = \eta\, dz + z\, d\eta$$

ist, so wird die Gleichung (1) übergehen in:

$$P_1 (\xi\, dz + z\, d\xi) + Q_1 (\eta\, dz + z\, d\eta) + R_1\, dz = 0$$

Wird diese geordnet, so nimmt sie nachstehende Gestalt an

$$(P_1\, d\xi + Q_1\, d\eta)\, z + (P_1\, \xi + Q_1\, \eta + R_1)\, dz = 0$$

und lässt sich nun so schreiben:

$$\frac{dz}{z} = - \frac{P_1\, d\xi + Q_1\, d\eta}{P_1\, \xi + Q_1\, \eta + R_1} \tag{15}$$

Da die Gleichung (1) vorausgesetztermassen integrabel ist, so muss auch die Gleichung (15) integrabel sein, da durch das Einführen von neuen Variablen ξ und η in eine Gleichung der Charakter der Integrabilität derselben nicht verloren geht. Nun steht im ersten Theil der Gleichung (15) blos z; im zweiten Theil blos ξ und η; folglich muss, da der erste Theil der Gleichung (15) für sich integrirbar ist, auch der zweite Theil für sich integrirbar sein, d. h. man erhält

$$\log z = - \int \frac{P_1\, d\xi + Q_1\, d\eta}{P_1\, \xi + Q_1\, \eta + R_1}$$

führt man die Integration aus (etwa nach der im §. 4 gelehrten Methode) und setzt man, nachdem dies geschehen, für ξ und η ihre sich aus den Gleichungen

$$x = \xi z \qquad y = \eta z$$

ergebenden Werthe, so erhält man das gewünschte Integrale der vorgelegten Gleichung.

§. 15.

Sei z. B. gegeben die homogene Differentialgleichung

$$(y^2 + yz + z^2)\, dx + (z^2 + xz + x^2)\, dy + (x^2 + xy + y^2)\, dz = 0$$

Diese Gleichung ist, wie man sich leicht überzeugt, eine integrable. Wir setzen also, behufs der Integration derselben

$$x = \xi z, \qquad y = \eta z$$

und erhalten zunächst für P_1, Q_1, R_1 folgende Werthe:

$$P_1 = \eta^2 + \eta + 1$$
$$Q_1 = \xi^2 + \xi + 1$$
$$R_1 = \xi^2 + \eta\xi + \eta^2$$

demnach ist:

$$\log z = - \int \frac{(\eta^2 + \eta + 1)\, d\xi + (\xi^2 + \xi + 1)\, d\eta}{(\eta^2 + \eta + 1)\, \xi + (\xi^2 + \xi + 1)\, \eta + \xi^2 + \xi\eta + \eta^2}$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Nenner lässt sich so schreiben:

$$(\xi + \eta + 1)\,(\xi\eta + \xi + \eta)$$

folglich hat man:

$$\log z = -\int \frac{(\eta^2 + \eta + 1)\,d\xi + (\xi^2 + \xi + 1)\,d\eta}{(\xi + \eta + 1)\,(\xi\eta + \xi + \eta)}$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Bruch lässt sich in Partialbrüche zerlegt, folgendermassen schreiben:

$$\frac{(\eta^2 + \eta + 1)\,d\xi + (\xi^2 + \xi + 1)\,d\eta}{(\xi + \eta + 1)\,(\xi\eta + \xi + \eta)} = -\frac{d\xi + d\eta}{\xi + \eta + 1} + \frac{(\eta + 1)\,d\xi + (\xi + 1)\,d\eta}{\xi\eta + \eta + \xi}$$

und gibt durch Integration

$$\log z = \log(\xi + \eta + 1) - \log(\xi\eta + \xi + \eta) + \log C$$

folglich ist:

$$z = \frac{C\,(\xi + \eta + 1)}{\xi\eta + \xi + \eta}$$

Setzt man hierin statt ξ und η ihre Werthe, nämlich

$$\xi = \frac{x}{z}, \qquad \eta = \frac{y}{z}$$

so erhält man

$$z = Cz \cdot \frac{x + y + z}{xy + xz + yz}$$

oder einfacher

$$C = \frac{xy + xz + yz}{x + y + z}$$

als Integrale der vorgelegten Gleichung.

Würde man die so eben erhaltene Gleichung differenziren, so würde man erhalten:

$$\frac{1}{(x+y+z)^2}\left[(y^2 + yz + z^2)\,dx + (z^2 + xz + x^2)\,dy + (x^2 + xy + y^2)\,dz\right] = 0$$

und hieraus sieht man, dass die vorgelegte Differentialgleichung sich auch so schreiben lässt:

$$(x + y + z)^2\,d \cdot \frac{xy + xz + yz}{x + y + z} = 0$$

Integration der totalen Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \qquad (1)$$

unter der Voraussetzung, dass zwischen den drei Grössen P, Q, R die Gleichung

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0 \qquad (11)$$

nicht stattfindet.

§. 16.

Die Gleichung (1) lässt sich, im Falle, als zwischen den Coefficienten P, Q, R derselben die Gleichung (11) nicht stattfindet, durch Eine Gleichung nicht integriren, d. h. es lässt sich nicht eine Gleichung von der Form

$$z = \varphi(x, y)$$

finden, welche der Gleichung (1) Genüge leistet; wohl aber lässt sich, wie Monge bemerkt hat, die Gleichung (1) integriren, mittelst zweier Gleichungen

$$y = \varphi(x), \qquad z = \psi(x)$$

und zwar auf unendlich viele Arten. Man kann nämlich, wie bereits im §. 1 gesagt wurde, die Gleichung

$$y = \varphi(x)$$

ganz willkürlich annehmen, und diesen Werth von y in (1) substituiren. Man gelangt dann zu einer Gleichung, in welcher blos die beiden Variablen x und z erscheinen. Diese lässt sich vorausgesetztermassen integriren, und gibt z als Function von x.

Man kann aber auch, um die Gleichungen der Form (1) zu integriren, falls zwischen den Coefficienten derselben die Gleichung (11) nicht stattfindet, nahezu denselben Weg betreten, den wir bisher bei Gleichungen eingeschlagen haben, für welche die Gleichung (11) stattfindet.

Man abstrahire nämlich vorerst von einer Variablen, etwa von z, indem man sich einstweilen z constant, also $dz = 0$ denkt. Unter dieser Voraussetzung geht die Gleichung (1) über in

$$Pdx + Qdy = 0$$

und lässt sich somit integriren. Nehmen wir an, das Integrale dieser Gleichung, welche eine willkürliche Constante C enthält, sei nach y auflösbar, und liefere

$$y = \varphi(x, z, C)$$

Führt man sodann in die vorgelegte Gleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{1}$$

für y eine neue Variable C ein, mittelst der Substitution

$$y = \varphi(x, z, C)$$

so gelangt man, genau so wie im §. 8 vorgehend, zu der Gleichung

$$\left[P_1 + Q_1 \frac{d\varphi}{dx}\right] dx + \left[Q_1 \frac{d\varphi}{dz} + R_1\right] dz + Q_1 \frac{d\varphi}{dC} dC = 0 \tag{13}$$

Die Gleichung (1) wird identisch, wenn man in selbe für y die Substitution

$$y = \varphi(x, z, C)$$

macht, und hiebei z und C als Constante ansieht, demnach muss unter denselben Voraussetzungen auch die Gleichung (13) identisch werden.

Allein unter diesen Voraussetzungen ist

$$dz = 0, \qquad dC = 0$$

und hiedurch geht die Gleichung (13) über in

$$\left[P_1 + Q_1 \frac{d\varphi}{dx}\right] dx = 0$$

Berücksichtigt man diese Identität, so vereinfacht sich die Gleichung (13) und geht über in:

$$\left[Q_1 \frac{d\varphi}{dz} + R_1\right] dz + Q_1 \frac{d\varphi}{dC} dC = 0$$

Es lässt sich demnach jederzeit die dreigliedrige Gleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{1}$$

durch Einführung einer neuen Variablen C mittelst der Substitution

$$y = \varphi(x, z, C)$$

in eine zweigliedrige Gleichung umwandeln, und diese lautet:

$$\left(Q_1 \frac{d\varphi}{dz} + R_1\right) dz + Q_1 \frac{d\varphi}{dC} dC = 0$$

Setzt man in die eben aufgestellte Gleichung für C seinen aus der Gleichung

$$y = \varphi(x, z, C)$$

hervorgehenden Werth, und ist dieser

$$C = \psi(x, y, z)$$

so hat man die Gleichung

$$\left(Q \frac{d\varphi}{dz} + R\right) dz + Q \frac{d\varphi}{dC} \; d\psi(x, y, z) = 0$$

welche mit der gegebenen Gleichung (1) identisch ist.

Man genügt nun dieser Gleichung, welche sich kurz folgendermassen schreiben lässt

$$K_1 dC_1 + K_2 dC_2 = 0$$

im allgemeinen auf drei verschiedene Arten:

Erstens, wenn man $C_1 = a$, $C_2 = b$ setzt, unter a und b willkürliche Constante verstanden;

Zweitens, wenn man C_1 gleich einer willkürlichen Function von C_2 etwa

$$C_1 = f(C_2)$$

setzt, wodurch

$$dC_1 = f'(C_2)\, dC_2$$

wird, und die Gleichung

$$K_1 dC_1 + K_2 dC_2 = 0$$

übergeht in

$$[K_1 f'(C_2) + K_2]\, dC_2 = 0$$

und nun

$$K_1 f'(C_2) + K_2 = 0$$

annimmt; also kurz, wenn man

$$C_1 = f(C_2) \quad \text{und} \quad K_1 f'(C_2) + K_2 = 0$$

setzt, endlich Drittens, wenn man

$$K_1 = 0 \quad \text{und} \quad K_2 = 0$$

setzt.

§. 17.

Sei z. B. zu integriren die Gleichung

$$\alpha z^n\, dx + \beta x^n\, dy + \gamma y^n\, dz = 0$$

Denkt man sich vorerst z constant, somit $dz = 0$, so hat man:

$$\alpha z^n\, dx + \beta x^n\, dy = 0$$

Dividirt man diese Gleichung durch x^n, so erhält man

$$\alpha z^n \frac{dx}{x^n} + \beta y = 0$$

woraus durch Integration

$$-\frac{\alpha z^n}{(n-1)\, x^{n-1}} + \beta y = C$$

folgt, unter C eine willkürliche Constante verstanden.

Führt man sodann in die gegebene Gleichung

$$\alpha z^n\, dx + \beta x^n\, dy + \gamma y^n\, dz = 0$$

für y eine neue Variable C ein, mittelst der Substitution

$$y = \frac{C}{\beta} + \frac{\alpha z^n}{(n-1)\, \beta\, x^{n-1}}$$

so hat man, da hieraus

$$dy = \frac{1}{\beta}\, dC + \frac{n \alpha z^{n-1}\, dz}{(n-1)\, \beta\, x^{n-1}} - \frac{\alpha z^n\, dx}{\beta\, x^n}$$

folgt

$$\alpha z^n\, dx + x^n\, dC + \frac{\alpha n x\, z^{n-1}\, dz}{(n-1)} - \alpha z^n\, dx + \gamma \left(\frac{C}{\beta} + \frac{\alpha z^n}{(n-1)\, \beta x^{n-1}}\right)^n dz = 0$$

oder reducirt:

$$x^n\, dC + \left[\frac{\alpha n x\, z^{n-1}}{n-1} + \gamma \left(\frac{C}{\beta} + \frac{\alpha z^n}{(n-1)\, \beta x^{n-1}}\right)^n\right] dz = 0$$

Setzt man hierein für C seinen Werth, so erhält man:

$$x^n\, d\left[\beta y - \frac{\alpha z^n}{(n-1)\, x^{n-1}}\right] + \left[\frac{\alpha n x z^{n-1}}{n-1} + \gamma y^n\right] dz = 0$$

und diese Gleichung ist mit der zur Integration vorgelegten Gleichung identisch. Man genügt ihr auf dreierlei Art:

Erstens, wenn man

$$\beta y - \frac{\alpha z^n}{(n-1)\, x^{n-1}} = a, \qquad z = b$$

setzt, unter a und b willkürliche Constante verstanden;

Zweitens, wenn man

$$\beta y - \frac{\alpha z^n}{(n-1)\, x^{n-1}} = \varphi(z)$$

setzt, unter $\varphi(z)$ eine willkürliche Function von z verstanden, nur muss noch

$$x^n\, \varphi'(z) + \frac{\alpha n x z^{n-1}}{n-1} + \gamma y^n = 0$$

sein;

Drittens, wenn zugleich

$$x^n = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha n x z^{n-1}}{n-1} + \gamma y^n = 0$$

ist, was reducirt auf die Auflösung

$$x = 0, \qquad y = 0$$

führt.

Behandeln wir noch folgende von Monge herrührende Gleichung

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x(x-a) + y(y-b)}$$

Selbe lässt sich, wie man auf den ersten Blick sieht, folgendermassen schreiben:

$$2\,[x\,(x-a) + y\,(y-b)]\,dz = (z-c)\,d\,(x^2 + y^2)$$

und ihr genügt man:

Erstens, wenn man

$$z = \alpha$$
$$x^2 + y^2 = \beta$$

setzt, unter α und β willkürliche Constante verstanden;

Zweitens, wenn man

$$x^2 + y^2 = \varphi\,(z)$$

setzt, woselbst $\varphi\,(z)$ eine willkürliche Function von z bezeichnet, und zugleich

$$2\,[x\,(x-a) + y\,(y-b)] = (z-c)\,\varphi'\,(z)$$

ist; endlich

Drittens, wenn man

$$z = c \quad \text{und} \quad x\,(x-a) + y\,(y-b) = 0$$

annimmt.

Zweiter Abschnitt.

Integration partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung von der Form

$$L\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} = N$$

woselbst L, M, N gegebene Functionen von x, y, z bezeichnen.

§. 18.

Wir wollen der Kürze halber

$$\frac{dz}{dx} = p, \qquad \frac{dz}{dy} = q$$

setzen, und legen uns demnach die Aufgabe vor, für z eine solche Function von x und y aufzusuchen, welche in die Gleichung

$$Lp + Mq = N \tag{16}$$

substituirt, derselben identisch Genüge leistet.

Man nennt Gleichungen der Form (16) lineare, partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung, p und q bedeuten in derselben die partiellen Differentialquotienten von z genommen nach x und nach y, so dass stets p, q und z in folgendem analytischen Zusammenhange stehen:

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{17}$$

Bestimmt man aus der gegebenen Gleichung (16) den Werth von q und substituirt denselben in die Gleichung (17), so erhält man die Gleichung:

$$dz = p\,dx + \frac{N - Lp}{M}\,dy \tag{18}$$

Wenn es uns nun gelingt — und sei es auch durch blossen Zufall — für p eine solche Function von x, y, z anzugeben, welche in die Gleichung (18) substituirt, diese Gleichung in eine integrable verwandelt, so ist das z, welches man dann durch Integration der Gleichung (18) findet, ein solches, welches der vorgelegten partiellen Differentialgleichung (16) genügt, und das p, welches wir in die Gleichung (18) eingeführt haben, ist der partielle Differentialquotient des gefundenen Werthes von z nach x genommen.

Um dies zu beweisen, denken wir uns also, dass wir für p eine solche Function von x, y, z gefunden haben, welche die Gleichung (18) in eine integrable verwandelt. Man erhält alsdann die Gleichung (18) integrirend

$$z = \varphi (x, y)$$

Dieses z leistet offenbar der Gleichung (18) Genüge, denn es wurde ja aus ihr entwickelt. Substituirt man nun dieses z in die Gleichung (18), so erhält man die identische Gleichung

$$\frac{d\varphi (x, y)}{dx} dx + \frac{d\varphi (x, y)}{dy} dy = p dx + \frac{N - Lp}{M} dy$$

aus welcher folgt:

$$\frac{d\varphi (x, y)}{dx} = p$$

$$\frac{d\varphi (x, y)}{dy} = \frac{N - Lp}{M}$$

also ist in der That das gefundene z nach x differenzirt, gleich p, und das gefundene z nach y differenzirt, gleich $\frac{N - Lp}{M}$, wie es in Folge der vorgelegten partiellen Differentialgleichung sein soll.

Die Aufgabe, die partielle Differentialgleichung

$$Lp + Mq = N \tag{16}$$

zu integriren, läuft daher darauf hin, für p eine solche Function von x, y, z anzugeben, für welche die Gleichung

$$dz = p dx + \frac{N - Lp}{M} dy \tag{18}$$

eine integrable wird.

Die Gleichung (18) lässt sich transformiren. Befreit man sie von Brüchen, so erhält man

$$M dz = Mp dx + (N - Lp) dy$$

und diese lässt sich auch folgendermassen schreiben:

$$M dz - N dy = p (M dx - L dy) \tag{19}$$

§. 19.

Bevor wir an die Integration der Gleichung (19) gehen, wollen wir nachfolgendes System von Differentialgleichungen betrachten:

$$\left.\begin{aligned} M dz - N dy &= 0 \\ M dx - L dy &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

und zeigen, wie ein solches System gewöhnlicher Differentialgleichungen im Allgemeinen zu integriren sei.

Es gibt wohl sehr viele specielle Fälle, in welchen die Integration beider Gleichungen gar keine Schwierigkeiten verursacht, so z. B., wenn die erste Gleichung blos die Variablen y und z, die zweite hingegen blos die Variablen x und y enthält. Im Allgemeinen aber, wenn in beiden Gleichungen x, y und z vorkommen, denke man sich eine der drei Grössen x, y, z, etwa x

als unabhängige Variable, und die beiden anderen Variabeln y und z als Functionen von x. Unter dieser Voraussetzung lassen sich die Gleichungen (20) folgendermassen schreiben:

$$M\frac{dz}{dx} - N\frac{dy}{dx} = 0$$
$$M - L\frac{dy}{dx} = 0$$

Differenzirt man sodann die letzte Gleichung nach x, so erhält man:

$$\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{dM}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} - L\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\left[\frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{dL}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right] = 0$$

und eliminirt man nun aus den drei letzten Gleichungen z und $\frac{dz}{dx}$, so erhält man eine Gleichung, welche die Variablen

$$x,\quad y,\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

enthält, und die integrirt y als Function von x mit zwei willkürlichen Constanten versehen, liefert.

Setzt man sodann das gefundene y in die Gleichung

$$M - L\frac{dy}{dx} = 0$$

so kann man dann aus derselben z als Function von x und derselben zwei willkürlichen Constanten auffinden.

Den Gleichungen (20) leisten also genüge Werthe von y und z, und diese haben folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} y &= \varphi\,(x,\ a,\ b) \\ z &= \psi\,(x,\ a,\ b) \end{aligned} \tag{21}$$

unter a und b willkürliche Constante verstanden. Aus diesen beiden Gleichungen kann man auch a und b berechnen, und findet, falls man dies thut

$$\begin{aligned} a &= F_1\,(x,\ y,\ z) \\ b &= F_2\,(x,\ y,\ z) \end{aligned} \tag{22}$$

§. 20.

Wir kehren nun wieder zurück zu unserer eigentlichen Aufgabe, welche nun darin besteht, für p eine solche Function von x, y, z aufzufinden, welche in die Gleichung

$$Mdz - Ndy = p\,(Mdx - Ldy) \tag{19}$$

gesetzt, selbe zu einer integrablen macht.

Denken wir uns ein solches p bereits gefunden, und führen wir dann, behufs Integration der Gleichung (19) in dieselbe für y und z neue Variable a und b ein, mittelst den Substitutionen

$$\begin{aligned} y &= \varphi\,(x,\ a,\ b) \\ z &= \psi\,(x,\ a,\ b) \end{aligned} \tag{21}$$

alsdann hat man, da

$$dy = \frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{da}\,da + \frac{d\varphi}{db}\,db$$
$$dz = \frac{d\psi}{dx}\,dx + \frac{d\psi}{da}\,da + \frac{d\psi}{db}\,db$$

ist, statt der Gleichung (19) folgende Gleichung:

$$\left(M\frac{d\psi}{dx} - N\frac{d\varphi}{dx}\right) dx + \left(M\frac{d\psi}{da} - N\frac{d\varphi}{da}\right) da + \left(M\frac{d\psi}{db} - N\frac{d\varphi}{db}\right) db =$$
$$= p_1\left[\left(M - L\frac{d\varphi}{dx}\right) dx - L\frac{d\varphi}{da}\,da - L\frac{d\varphi}{db}\,db\right] \tag{23}$$

in welcher p_1 das Resultat der Substitution der in (21) gegebenen Werthe von y und z in p bezeichnet.

Die Gleichung (19) ist vorausgesetztermassen — für ein bereits als gefunden gedachtes p — integrabel, also ist auch die Gleichung (23) integrabel, weil, wie schon wiederholt gesagt wurde, das Einführen neuer Variablen den Charakter der Integrabilität einer Gleichung nicht ändert.

Die Gleichung (19) wird identisch, wenn man in selber für y und z die Substitutionen

$$\begin{aligned} y &= \varphi\,(x,\ a,\ b) \\ z &= \psi\,(x,\ a,\ b) \end{aligned} \tag{21}$$

macht, und sich hiebei a und b als constant denkt, denn diese y und z genügen ja unter Voraussetzung constanter Werthe für a und b den Gleichungen

$$\begin{aligned} Mdz - Ndy &= 0 \\ Mdx - Ldy &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

also muss auch die Gleichung (23) identisch werden, wenn man in selber a und b constant, somit $da = 0$, $db = 0$ setzt, demnach muss sein:

$$\left(M\frac{d\psi}{dx} - N\frac{d\varphi}{dx}\right) dx = p_1\left(M - L\frac{d\varphi}{dx}\right) dx$$

und zwar muss diese Gleichung identisch stattfinden; berücksichtigt man diese Identität, so vereinfacht sich die Gleichung (23) und geht über in:

$$\left(M\frac{d\psi}{da} - N\frac{d\varphi}{da}\right) da + \left(M\frac{d\psi}{db} - N\frac{d\varphi}{db}\right) db = -p_1\left(L\frac{d\varphi}{da}\,da + L\frac{d\varphi}{db}\,db\right]$$

oder anders geschrieben, in:

$$\left(M\frac{d\psi}{da} - N\frac{d\varphi}{da} + p_1 L\frac{d\varphi}{da}\right) da + \left(M\frac{d\psi}{db} - N\frac{d\varphi}{db} + p_1 L\frac{d\varphi}{db}\right) db = 0 \tag{24}$$

Da diese Gleichung, in welcher nur noch x, a und b erscheint, integrabel sein soll, so kann, da kein dx in derselben vorkömmt, auch kein x in derselben vorkommen, ausser etwa in einem, den beiden Ausdrücken

$$M\frac{d\psi}{da} - N\frac{d\varphi}{da} + p_1 L\frac{d\varphi}{da}$$
$$M\frac{d\psi}{db} - N\frac{d\varphi}{db} + p_1 L\frac{d\varphi}{db}$$

gemeinschaftlichen Factor, der sich aber, falls er vorhanden ist, durch Division wegbringen lässt. Thut man dies, und integrirt man sodann die Gleichung (24), so erhält man

$$\chi(a, b) = 0$$

woraus

$$b = f(a)$$

folgt. Setzt man sodann in diese Gleichung für a und b ihre in (22) aufgestellten Werthe, so erhält man das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung.

Es lässt sich nun sehr leicht zeigen, dass b einer willkürlichen Function von a gleich gesetzt werden kann, da man, was immer b für eine Function von a ist, stets einen Werth für p findet, der die Gleichung (19) integrabel macht. Denn nimmt man für b was immer für eine Function von a an, etwa

$$b = f(a)$$

so hat man

$$db = f'(a)\, da$$

und setzt man dies in die Gleichung (24), so erhält man:

$$\left[M\frac{d\psi}{da} - N\frac{d\varphi}{da} + p_1 L\frac{d\varphi}{da} + \left(M\frac{d\psi}{db} - N\frac{d\varphi}{db} + p_1 L\frac{d\varphi}{db}\right) f'(a)\right] da = 0$$

woraus sich p_1 als Function von a und b, und somit unter Zuziehung der Gleichungen (22) p als Function von x, y, z ergibt.

§. 21.

Es ergibt sich demnach für die Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung von der Form

$$Lp + Mq = N \tag{16}$$

in welcher L, M, N beliebige Functionen von x, y, z sind, folgende Regel:

Man stelle die beiden simultanen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} Mdz - Ndy &= 0 \\ Mdx - Ldy &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

auf, und integrire dieselben.

Wären die Integrale derselben

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x, a, b) \\ z &= \psi(x, a, b) \end{aligned} \tag{21}$$

woselbst a und b willkürliche Constante bezeichnen, so löse man diese Gleichungen nach a und b auf, und gesetzt den Fall, man fände aus ihnen

$$\begin{aligned} a &= F_1(x, y, z) \\ b &= F_2(x, y, z) \end{aligned} \tag{22}$$

so ist $F_1(x, y, z)$ gleich einer willkürlichen Function von $F_2(x, y, z)$ das Integrale der vorgelegten Gleichung.

Die Integrationsmethode, welche wir so eben entwickelt haben, setzt voraus, dass in der partiellen Differentialgleichung

$$Lp + Mq = N \tag{16}$$

das M von Null verschieden ist. Ist aber $M = 0$, so hat man die einfachere Gleichung

$$Lp = N$$

zu integriren. Aus selber ergibt sich

$$p = \frac{N}{L}$$

und dies in

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{17}$$

substituirt, führt auf die Gleichung

$$dz = \frac{N}{L}\,dx + q\,dy$$

welche von Brüchen befreit und geordnet, die Gestalt annimmt

$$L\,dz - N\,dx = Lq\,dy$$

Stellt man nun die beiden simultanen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} L\,dz - N\,dx &= 0 \\ L\,dy &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

auf, und integrirt dieselben, so erhält man für y und z Ausdrücke von folgender Gestalt

$$\begin{aligned} y &= a \\ z &= \psi\,(x,\ a,\ b) \end{aligned}$$

und aus diesen ergibt sich

$$\begin{aligned} a &= y \\ b &= F\,(x,\ y,\ z) \end{aligned}$$

Man kann nun wieder, und zwar auf dieselbe Weise, wie wir dies im vorigen Paragraphe gethan, darthun, dass $F\,(x,\ y,\ z)$ einer willkürlichen Function von y gleich gesetzt, das Integrale der vorgelegten Gleichung ist.

Beispiele über die Integration linearer partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung.

§. 22.

Wir entnehmen diese Beispiele zum grössten Theile dem dritten Bande des Werkes „Leonhard Euler's vollständige Anleitung zur Integralrechnung“ aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzt von Josef Salomon, und werden in der Folge blos Band und Seite dieses Werkes citiren.

Aufgabe 1.

Es sei zu integriren die partielle Differentialgleichung (Band 3, Seite 32)

$$p = k$$

unter k eine Constante verstanden.

In diesem speciellen Falle hat man

$$L = 1, \qquad M = 0, \qquad N = k$$

Die beiden simultanen Differentialgleichungen (25) lauten in diesem Falle:

$$dz - k\,dx = 0$$
$$dy = 0$$

Durch Integration dieser Gleichungen erhält man:

$$z - kx = a\,, \qquad y = b$$

folglich ist

$$z - kx = \varphi\,(y)$$

oder

$$z = kx + \varphi\,(y)$$

das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung, unter $\varphi\,(y)$ eine willkürliche Function von y verstanden. Man sieht auch äusserst leicht ein, dass wirklich die Gleichung

$$z = kx + \varphi\,(y)$$

partiell nach x differenzirt

$$\frac{dz}{dx} = k$$

liefert.

Aufgabe 2.

Es sei zu integriren die partielle Differentialgleichung (Band 3, Seite 39)

$$p = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

In diesem Falle hat man

$$L = 1\,, \qquad M = 0\,, \qquad N = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Die beiden simultanen Differentialgleichungen (25) lauten in diesem Falle:

$$dz - \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$
$$dy = 0$$

Aus der letzten folgt

$$y = a$$

dadurch wird die erste Gleichung übergehen in:

$$dz - \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = 0$$

und diese liefert integrirt:

$$z - \sqrt{x^2 + a^2} = b$$

Man hat daher als Integrale der beiden simultanen Differentialgleichungen

$$a = y$$
$$b = z - \sqrt{x^2 + y^2}$$

und folglich ist:

$$z - \sqrt{x^2 + y^2} = \varphi\,(y)$$

das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung unter $\varphi\,(y)$ eine willkürliche Function von y verstanden.

Aufgabe 3.

Ist (Band 3, Seite 39)

$$p = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

so lauten die beiden Hilfs-Differentialgleichungen:

$$dz - \frac{y\,dx}{\sqrt{y^2 - x^2}} = 0$$

$$dy = 0$$

Aus ihnen folgen zunächst:

$$y = a$$

und

$$dz - \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$$

Letztere gibt integrirt:

$$z - a \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} = b$$

folglich ist:

$$a = y$$

$$b = z - y \operatorname{arc} \sin \frac{x}{y}$$

und das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung lautet:

$$z - y \operatorname{arc} \sin \frac{x}{y} = \psi\,(y)$$

unter $\psi\,(y)$ eine willkürliche Function von y verstanden.

Aufgabe 4.

Ist (Band 3, Seite 40)

$$p = \frac{k}{\sqrt{k^2 - x^2 - y^2}}$$

woselbst k eine Constante bezeichnet, so kömmt man zu folgenden zwei simultanen Differentialgleichungen:

$$dz - \frac{k\,dx}{\sqrt{k^2 - x^2 - y^2}} = 0$$

$$dy = 0$$

hieraus folgen

$$y = a$$

$$dz - \frac{k\,dx}{\sqrt{k^2 - a^2 - x^2}} = 0$$

Die letztere Gleichung gibt integrirt:

$$z - k \operatorname{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{k^2 - a^2}} = b$$

Demnach hat man

$$a = y$$

$$b = z - k \operatorname{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{k^2 - y^2}}$$

folglich ist:

$$z - k \ arc \ sin \frac{x}{\sqrt{k^2 - y^2}} = \psi (y)$$

das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung, unter $\psi(y)$ eine willkürliche Function von y verstanden.

Aufgabe 5.

Ist (Band 3, Seite 45)

$$p = \frac{y}{z}$$

so lauten hiefür die zwei Hilfs-Differentialgleichungen:

$$z dz - y dx = 0$$
$$dy = 0$$

Aus ihnen folgen

$$y = a$$
$$z dz - a dx = 0$$

Letztere gibt integrirt:

$$\frac{z^2}{2} - ax = b$$

es ist sonach

$$a = y$$
$$b = \frac{z^2}{2} - xy$$

und folglich hat man als Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung

$$\frac{z^2}{2} - xy = \psi (y)$$

unter $\psi(y)$ eine willkürliche Function von y verstanden.

Aufgabe 6.

Es sei (Band 3, Seite 46)

$$p = \frac{\sqrt{y^2 - z^2}}{z}$$

hiefür lauten die zwei Hilfs-Gleichungen

$$z dz - \sqrt{y^2 - z^2} \ dx = 0$$
$$dy = 0$$

Aus ihnen folgen zunächst

$$y = a$$
$$z dz - \sqrt{a^2 - z^2} \ dx = 0$$

Die letzte Gleichung gibt integrirt:

$$-\sqrt{a^2 - z^2} - x = -b$$

folglich hat man

$$a = y$$
$$b = x + \sqrt{y^2 - z^2}$$

und somit ist:

$$x + \sqrt{y^2 - z^2} = \psi(y)$$

das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung unter $\psi(y)$ eine willkürliche Function von y verstanden.

Aufgabe 7.

Es sei (Band 3, Seite 48)

$$p = \frac{nz}{x}$$

unter n eine Constante verstanden. Die beiden Hilfs-Gleichungen lauten hiefür:

$$xdz - nzdx = 0$$
$$dy = 0$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind:

$$y = a$$
$$z = bx^n$$

hieraus folgt zunächst:

$$a = y, \qquad b = \frac{z}{x^n}$$

folglich ist:

$$\frac{z}{x^n} = \psi(y)$$

oder

$$z = x^n \psi(y)$$

das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung unter $\psi(y)$ eine willkürliche Function von y verstanden.

Aufgabe 8.

Ist (Band 3, Seite 49)

$$p = nx - z$$

unter n eine Constante verstanden, so lauten die beiden Hilfs-Differentialgleichungen:

$$dz - (nx - z)\,dx = 0$$
$$dy = 0$$

Ihre Integrale sind:

$$z = -n + nx + ae^{-x}$$
$$y = b$$

Aus beiden folgt:

$$a = (z + n - nx)\,e^x, \qquad b = y$$

somit ist:

$$(z + n - nx)\,e^x = \psi(y)$$

oder es ist:

$$z = nx - n + e^{-x}\psi(y)$$

das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung unter $\psi(y)$ eine willkürliche Function von y verstanden.

Aufgabe 9.

Ist (Band 3, Seite 49)

$$p = \frac{xz}{x^2 + z^2}$$

so lauten hiefür die beiden Hilfs-Differentialgleichungen

$$dz - \frac{xz}{x^2 + z^2}\, dx = 0$$
$$dy = 0$$

Ihre Integrale sind:

$$\log z - \frac{x^2}{2z^2} = a$$
$$y = b$$

somit ist

$$\log z - \frac{x^2}{2z^2} = \psi(y)$$

das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung unter $\psi(y)$ eine willkürliche Function von y verstanden.

Aufgabe 10.

Es sei (Band 3, Seite 53)

$$p = \frac{xz}{ny}$$

woselbst n eine Constante bezeichnet, die beiden Hilfs-Differentialgleichungen lauten hiefür:

$$dz - \frac{xz}{ny}\, dx = 0$$
$$dy = 0$$

Aus ihnen folgt zunächst

$$y = b$$
$$dz - \frac{xz}{nb}\, dx = 0$$

Aus der letzten folgt durch Integration

$$nb \log z - \frac{x^2}{2} = a$$

es ist somit:

$$ny \log z - \frac{x^2}{2} = \psi(y)$$

unter $\psi(y)$ eine willkürliche Function von y verstanden, hieraus folgt:

$$z = e^{\frac{x^2}{2ny} + \frac{\psi(y)}{ny}}$$

und dies lässt sich auch so schreiben:

$$z = e^{\frac{x^2}{2ny}} \,.\, F(y)$$

unter $F(y)$ eine willkürliche Function von y verstanden.

Aufgabe 11.

Es sei (Band 3, Seite 54)

$$p = \frac{y}{x+z}$$

Die zwei Hilfs-Differentialgleichungen lauten

$$dz - \frac{y}{x+z}\,dx = 0$$
$$dy = 0$$

hieraus folgen:

$$y = b$$
$$(x + z)\,dz - b\,dx = 0$$

Das Integrale der letzten Gleichung ergibt sich leicht, wenn man für z eine neue Variable t einführt, mittelst der Substitution $z = t - x$, man erhält nämlich alsdann die Gleichung

$$t\,(dt - dx) = b\,dx$$

woraus

$$dx = \frac{t\,dt}{t+b}$$

folgt. Aus ihr ergibt sich zunächst

$$x = t - b \log (t + b) + a$$

demnach ist:

$$z - b \log (x + z + b) + a = 0$$

Man hat daher:

$$b = y$$
$$a = y \log (x + y + z) - z$$

und hieraus folgt:

$$y \log (x + y + z) - z = \psi\,(y)$$

als Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung unter $\psi\,(y)$ eine willkürliche Function von y verstanden.

Aufgabe 12.

Es sei (Band 3, Seite 56)

$$p = \frac{y^2 + z^2}{y^2 + x^2}$$

Die beiden Hilfs-Differentialgleichungen lauten hier:

$$dz - \frac{y^2 + z^2}{y^2 + x^2}\,dx = 0, \qquad dy = 0$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$y = b$$

hiedurch lässt sich die erste Hilfs-Gleichung so schreiben:

$$\frac{dz}{b^2 + z^2} = \frac{dx}{b^2 + x^2}$$

und diese gibt integrirt:

$$\frac{1}{b} \,arc\, tang\, \frac{z}{b} = \frac{1}{b} \,arc\, tang\, \frac{x}{b} + a$$

Es ist demnach

$$b = y$$

$$a = \frac{1}{y}\left[arc\ tang\,\frac{z}{y} - arc\ tang\,\frac{x}{y}\right]$$

und somit hat man:

$$\frac{1}{y}\left[arc\ tang\,\frac{z}{y} - arc\ tang\,\frac{x}{y}\right] = \psi\,(y)$$

unter $\psi\,(y)$ eine willkürliche Function von y verstanden; oder, wenn man $y\,\psi\,(y) = F\,(y)$ setzt,

$$arc\ tang\,\frac{z}{y} - arc\ tang\,\frac{x}{y} = F\,(y)$$

Man kann diese Gleichung auch mittelst der bekannten Formel:

$$arc\ tang\,\alpha - arc\ tang\,\beta = arc\ tang\,\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$$

vereinfachen, denn es lässt sich obige Gleichung auch so schreiben:

$$arc\ tang\,\frac{y\,(z - x)}{y^2 + xz} = F\,(y)$$

oder, wenn man $tang\,F\,(y) = F_1\,(y)$ setzt:

$$\frac{y\,(z - x)}{y^2 + xz} = F_1\,(y)$$

und hieraus folgt, wenn man $\frac{F_1\,(y)}{y} = \varphi\,(y)$ setzt:

$$z - x = (y^2 + xz)\,\varphi\,(y)$$

unter $\varphi\,(y)$ eine willkürliche Function von y verstanden.

Aufgabe 13.

Es sei (Band 3, Seite 57)

$$p = \frac{y^2}{x^2 + z^2}$$

Die Integration dieser partiellen Differentialgleichung hängt ab von der Integration folgender simultanen Differentialgleichungen:

$$dz - \frac{y^2}{x^2 + z^2}\,dx = 0$$

$$dy = 0$$

Aus der zweiten folgt

$$y = b$$

hiedurch geht die erste über in:

$$b^2\,\frac{dx}{dz} = x^2 + z^2$$

Um diese zu integriren, führe ich eine neue Variable v ein, mittelst der Substitution

$$x = \frac{dv}{dz}$$

dadurch erhalte ich:

$$b^2\,\frac{d^2v}{dz^2} = \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + z^2$$

sodann führe ich für v eine neue Variable V ein, mittelst der Substitution

$$v = - b^2 \log V$$

man erhält hiedurch

$$b^4 \frac{d^2 V}{d z^2} + z^2 V = 0$$

welche Gleichung zu den Riccati'schen gehört. Behufs weiterer Vereinfachung setze ich

$$z = b\xi \left(\cos 45^0 + \sqrt{-1} \sin 45^0\right)$$

dadurch geht selbe über in

$$\frac{d^2 V}{d \xi^2} = \xi^2 V$$

welche Gleichung man Seite 94 meiner »Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen« oder auch Seite 43 meiner »neuen Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen« vollständig integrirt findet.

Da man hiedurch die beiden Hilfs-Differentialgleichungen zu integriren vermag, so lässt sich auch leicht das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung aufstellen.

Aufgabe 14.

Es sei die Gleichung (Band 3, Seite 59)

$$p = q$$

zu integriren. Die beiden Hilfs-Differentialgleichungen lauten für diesen Fall:

$$dz = 0$$
$$dx + dy = 0$$

Aus ihnen folgen:

$$a = z$$
$$b = x + y$$

folglich ist

$$z = \varphi\,(x + y)$$

unter $\varphi\,(x + y)$ eine willkürliche Function von $x + y$ verstanden.

Aufgabe 15.

Es sei zu integriren die Gleichung (Band 3, Seite 62)

$$\alpha p + \beta q = \gamma$$

unter α, β, γ constante Zahlen verstanden.

Die beiden Hilfs-Differentialgleichungen lauten hiefür:

$$\beta dz - \gamma dy = 0$$
$$\beta dx - \alpha dy = 0$$

Ihre Integrale sind:

$$\beta z - \gamma y = a$$
$$\beta x - \alpha y = b$$

folglich ist:

$$\beta z - \gamma y = \varphi\,(\beta x - \alpha y)$$

das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung, hiebei unter $\varphi\,(\beta x - \alpha y)$ eine willkürliche Function von $\beta x - \alpha y$ verstanden.

Aufgabe 16.

Es sei (Band 3, Seite 72)

$$q = \frac{px}{n}$$

unter n eine Constante verstanden.

Die beiden Hilfs-Differentialgleichungen lauten hiefür:

$$dz = 0$$

$$dx + \frac{x}{n}\,dy = 0$$

Durch Integration findet man:

$$z = a$$

$$n \log x + y = b$$

es ist demnach

$$n \log x + y = \varphi\,(z)$$

unter $\varphi\,(z)$ eine willkürliche Function von z verstanden.

Aufgabe 17.

Es sei zu integriren die Gleichung (Band 3, Seite 91)

$$p + q = \frac{z}{n}$$

unter n eine Constante verstanden.

Um diese Gleichung zu integriren, stelle man auf die beiden Differentialgleichungen:

$$dz - \frac{z}{n}\,dy = 0$$

$$dx - dy = 0$$

Aus ihnen folgen:

$$n \log z - y = a$$

$$x - y = b$$

demnach ist:

$$n \log z - y = \varphi\,(x - y)$$

und hieraus ergibt sich

$$z = e^{\frac{y}{n} + \frac{1}{n}\varphi(x-y)}$$

oder kürzer

$$z = e^{\frac{y}{n}}\,F\,(x - y)$$

woselbst $F\,(x - y)$ eine willkürliche Function von $x - y$ bezeichnet.

Aufgabe 18.

Es sei zu integriren die Gleichung (Band 3, Seite 99)

$$px + qy = 0$$

Die beiden Hilfsgleichungen lauten hier

$$y\,dz = 0$$
$$y\,dx - x\,dy = 0$$

Aus ihnen folgen:

$$z = a$$
$$y = bx$$

folglich ist

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung, und hier bezeichnet $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ eine willkürliche Function von $\frac{y}{x}$.

Aufgabe 19.

Es sei zu integriren die Gleichung (Band 3, Seite 100)

$$\alpha px + \beta qy = \gamma$$

unter α, β, γ constante Zahlen verstanden.

Die zwei Hilfs-Differentialgleichungen lauten für diesen Fall:

$$\beta y\,dz - \gamma\,dy = 0$$
$$\beta y\,dx - \alpha x\,dy = 0$$

Ihre Integration gibt:

$$\beta z - \gamma \log y = a$$
$$\frac{x^\beta}{y^\alpha} = b$$

folglich ist:

$$\beta z - \gamma \log y = \varphi\left(\frac{x^\beta}{y^\alpha}\right)$$

das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung und $\varphi\left(\frac{x^\beta}{y^\alpha}\right)$ bedeutet eine willkürliche Function von $\frac{x^\beta}{y^\alpha}$.

Aufgabe 20.

Es sei (Band 3, Seite 105)

$$q = p \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Die beiden simultanen Differentialgleichungen lauten:

$$-dz + \frac{y}{x}\,dy = 0$$
$$dx + \frac{x}{y}\,dy = 0$$

Die zweite Gleichung liefert

$$y = \frac{a}{x}$$

Dieser Werth in die erste Gleichung eingesetzt, gibt

$$dz + \frac{a^2}{x^4} dx = 0$$

und hieraus folgt:

$$z - \frac{a^2}{3x^3} = b$$

Es ist somit

$$a = xy$$

$$b = z - \frac{y^2}{3x}$$

und folglich hat man:

$$z = \frac{y^2}{3x} + \psi(xy)$$

woselbst $\psi(xy)$ eine willkürliche Function des Productes xy bezeichnet.

Aufgabe 21.

Es sei (Band 3, Seite 106)

$$px + qy = n\sqrt{x^2 + y^2}$$

unter n eine Constante verstanden.

Die beiden Hilfs-Differentialgleichungen lauten hier:

$$y\,dz - n\sqrt{x^2 + y^2}\,dy = 0$$
$$y\,dx - x\,dy = 0$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$y = ax$$

Dies in die erste Gleichung eingeführt, gibt:

$$dz - n\sqrt{1 + a^2}\,dx = 0$$

woraus durch Integration

$$z - n\sqrt{1 + a^2} \,.\, x = b$$

hervorgeht.

Man hat daher

$$a = \frac{y}{x}$$

$$b = z - n\sqrt{x^2 + y^2}$$

demnach ist:

$$z - n\sqrt{x^2 + y^2} = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

unter $\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ eine willkürliche Function von $\frac{y}{x}$ verstanden.

Aufgabe 22.

Es sei (Band 3, Seite 106)

$$px^2 + qy^2 = nxy$$

unter n eine Constante verstanden.

Die beiden Hilfs-Differentialgleichungen lauten hier:

$$y^2 dz - nxy\,dy = 0$$
$$y^2 dx - x^2 dy = 0$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = a$$

oder

$$y = \frac{x}{1 + ax}$$

dies in die erste Hilfs-Gleichung eingesetzt, gibt:

$$(1 + ax)\,dz - n\,dx = 0$$

und hieraus folgt:

$$z - \frac{n}{a} \log (1 + ax) = b$$

Aus den beiden Integralen der Hilfs-Differentialgleichungen ergibt sich

$$a = \frac{x - y}{xy}$$
$$b = z - \frac{nxy}{x - y} \log \frac{x}{y}$$

folglich ist:

$$z - \frac{nxy}{x - y} \log \frac{x}{y} = \psi \left(\frac{x - y}{xy}\right)$$

unter $\psi \left(\frac{x-y}{xy}\right)$ eine willkürliche Function von $\frac{x-y}{xy}$ verstanden.

Aufgabe 23.

Es sei (Band 3, Seite 121)

$$qxz = n^2 p$$

unter n eine Constante verstanden.

Die beiden Hilfs-Gleichungen lauten hier:

$$xz\,dz = 0$$
$$xz\,dx + n^2 dy = 0$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$z = a$$

durch dies wird die zweite Gleichung lauten:

$$ax\,dx + n^2 dy = 0$$

hieraus folgt:

$$\frac{a}{2} x^2 + n^2 y = b$$

demnach ist:

$$\frac{x^2 z}{2} + n^2 y = \psi (z)$$

unter $\psi (z)$ eine willkürliche Function von z verstanden.

Aufgabe 24.

Es sei zu integriren die Gleichung (Band 3, Seite 123)

$$px + qy = nz$$

unter n eine Constante verstanden.

Die beiden Hilfs-Differentialgleichungen lauten:

$$ydz - nzdy = 0$$
$$ydx - xdy = 0$$

aus ihnen folgen:

$$\frac{z}{y^n} = a$$
$$y = bx$$

folglich ist:

$$\frac{z}{y^n} = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

oder:

$$z = y^n \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

unter $\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ eine willkürliche Function von $\frac{y}{x}$ verstanden.

Aufgabe 25.

Es sei zu integriren die Gleichung (Band 3, Seite 126)

$$\alpha px + \beta qy = nz$$

unter α, β und n constante Zahlen verstanden.

Die zwei Hilfs-Differentialgleichungen lauten hier:

$$\beta ydz - nzdy = 0$$
$$\beta ydx - \alpha xdy = 0$$

aus ihnen folgen:

$$a = \frac{z^\beta}{y^n}, \qquad b = \frac{x^\beta}{y^\alpha}$$

demnach ist:

$$\frac{z^\beta}{y^n} = \psi\left(\frac{x^\beta}{y^\alpha}\right)$$

oder:

$$z = y^{\frac{n}{\beta}} \varphi\left(\frac{x^\beta}{y^\alpha}\right)$$

unter $\varphi\left(\frac{x^\beta}{y^\alpha}\right)$ eine willkürliche Function von $\frac{x^\beta}{y^\alpha}$ verstanden.

Aufgabe 26.

Es sei (Band 3, Seite 129)

$$px^2 + qy^2 = z^2$$

Die zwei Hilfs-Gleichungen lauten hier:

$$y^2 dz - z^2 dy = 0$$
$$y^2 dx - x^2 dy = 0$$

und ihre Integrale sind:

$$-\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=a$$

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=b$$

demnach hat man als Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\varphi\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)$$

unter $\varphi\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)$ eine willkürliche Function von $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$ verstanden.

Aufgabe 27.

Es sei (Band 3, Seite 130)

$$\frac{p}{x}+\frac{q}{y}=\frac{n}{z}$$

unter n eine Constante verstanden.

Die zwei Hilfs-Gleichungen lauten hiefür:

$$z\,dz - n\,y\,dy = 0$$

$$x\,dx - y\,dy = 0$$

Die Integrale dieser zwei Gleichungen sind:

$$z^2 - n\,y^2 = a$$

$$x^2 - y^2 = b$$

folglich ist:

$$z^2 - ny^2 = \varphi\,(x^2 - y^2)$$

das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung, unter $\varphi\,(x^2 - y^2)$ eine willkürliche Function von $x^2 - y^2$ verstanden.

Aufgabe 28.

Es sei (Band 3, Seite 131)

$$py + qx = z$$

Die zwei Hilfs-Gleichungen lauten hiefür:

$$x\,dz - z\,dy = 0$$

$$x\,dx - y\,dy = 0$$

Aus der zweiten von ihnen folgt:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Sucht man hieraus y, so hat man:

$$y = \sqrt{x^2 - a^2}$$

daraus folgt:

$$dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

und dies in die erste Hilfs-Gleichung eingeführt, gibt:

$$dz - \frac{z\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = 0$$

Durch Integration dieser Gleichung erhält man:

$$\log z - \log \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}} = \log \frac{b}{a}$$

oder, wenn man den Nenner rational macht:

$$\log z - \log \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \log \frac{b}{a}$$

hieraus folgt:

$$b = \frac{a^2 z}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

oder:

$$b = \frac{a^2 z}{x + y}$$

oder, wenn man für a^2 seinen Werth $x^2 - y^2$ setzt:

$$b = (x - y)\, z$$

Da man nun a und b kennt, so kann man das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung aufstellen, es ist nämlich:

$$(x - y)\, z = \varphi\,(x^2 - y^2)$$

unter $\varphi\,(x^2 - y^2)$ eine willkürliche Function von $x^2 - y^2$ verstanden.

Aufgabe 29.

Es sei (Band 3, Seite 132)

$$py + qx = \frac{nxz}{y}$$

unter n eine Constante verstanden.

Die beiden Hilfs-Differentialgleichungen lauten:

$$ydz - nzdy = 0$$
$$xdx - ydy = 0$$

Aus ihnen folgen:

$$z = ay^n$$
$$x^2 - y^2 = b$$

folglich ist:

$$z = y^n \varphi\,(x^2 - y^2)$$

unter $\varphi\,(x^2 - y^2)$ eine willkürliche Function von $x^2 - y^2$ verstanden.

Aufgabe 30.

Es sei (Band 3, Seite 133)

$$px^2 + qy^2 = nyz$$

Die beiden Hilfs-Gleichungen lauten:

$$ydz - nzdy = 0$$
$$y^2dx - x^2dy = 0$$

Aus ihnen folgen:

$$z = a y^n$$
$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = b$$

demnach ist:

$$z = y^n \varphi \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

unter $\varphi \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$ eine willkürliche Function von $\frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ verstanden.

Aufgabe 31.

Es sei (Band 3, Seite 137)

$$z = p (x + y) + q (y - x)$$

Die Hilfs-Gleichungen lauten:

$$(y - x)\, dz - z dy = 0$$
$$(y - x)\, dx - (x + y)\, dy = 0$$

Um diese beiden homogenen Differentialgleichungen zu integriren, setze man in dieselben

$$y = t x$$

unter t eine neue Variable verstanden, man erhält dann:

$$\frac{dx}{x} + \frac{1 + t}{1 + t^2}\, dt = 0$$
$$(t - 1)\, dz - t z \frac{dx}{x} - z dt = 0$$

Die erste Gleichung lässt sich leicht integriren; thut man dies und setzt sodann für t seinen Werth $\frac{y}{x}$, so erhält man:

$$2\, arc\, tang \frac{y}{x} + log\, (x^2 + y^2) = 2 a$$

Die zweite Gleichung geht, wenn man für $\frac{dx}{x}$ seinen aus der ersten Gleichung folgenden Werth $-\frac{1 + t}{1 + t^2}\, dt$ einführt, über in

$$\frac{dz}{z} + \frac{dt}{1 + t^2} = 0$$

und lässt sich nun auch integriren. Setzt man sodann auch in dem gefundenen Integrale für t seinen Werth $\frac{y}{x}$, so erhält man:

$$b = log\, z + arc\, tang \frac{y}{x}$$

Es ist demnach das Integrale der vorgelegten partiellen Differential-Gleichung.

$$log\, z + arc\, tang \frac{y}{x} = \varphi \left(arc\, tang \frac{y}{x} + \tfrac{1}{2} log\, (x^2 + y^2)\right)$$

unter $\varphi\left(arc\ tang\ \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\right)$ eine willkürliche Function von $arc\ tang\ \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ verstanden.

Aufgabe 32.

Es sei (Band 3, Seite 137)

$$z = p(\alpha x + \beta y) + q(\gamma x + \delta y)$$

unter α, β, γ, δ constante Zahlen verstanden.

In diesem Falle lauten die zwei Hilfs-Differentialgleichungen:

$$(\alpha x + \beta y)\, dz - z\, dx = 0$$
$$(\alpha x + \beta y)\, dy - (\gamma x + \delta y)\, dx = 0$$

Um diese beiden homogenen Differentialgleichungen zu integriren, setze man in beiden

$$y = tx$$

dadurch erhält man

$$x(\alpha + \beta t)\, dz - z\, dx = 0$$
$$(\alpha + \beta t)(t\, dx + x\, dt) - (\gamma + \delta t)\, dx = 0$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\frac{dx}{x} = \frac{(\alpha + \beta t)\, dt}{\gamma + (\delta - \alpha)t - \beta t^2}$$

und durch Integration dieser Gleichung erhält man:

$$\log x = \int \frac{(\alpha + \beta t)\, dt}{\gamma + (\delta - \alpha)t - \beta t^2} + a$$

Die erste Hilfs-Differentialgleichung lässt sich so schreiben:

$$(\alpha + \beta t)\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$$

und wenn man hierein für $\frac{dx}{x}$ seinen Werth setzt, dann beiderseits durch $\alpha + \beta t$ dividirt, und integrirt, so erhält man:

$$\log z = \int \frac{dt}{\gamma + (\delta - \alpha)t - \beta t^2} + b$$

Es ist demnach das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung:

$$\log z - \int \frac{dt}{\gamma + (\delta - \alpha)t - \beta t^2} = \varphi\left(\log x - \int \frac{(\alpha + \beta t)\, dt}{\gamma + (\delta - \alpha)t - \beta t^2}\right)$$

nur muss nach vorgenommener Integration statt t sein Werth $\frac{y}{x}$ eingeführt werden.

Aufgabe 33.

Es sei (Band 3, Seite 141)

$$nz = py - qx$$

unter n eine beliebige Constante verstanden.

Die beiden Hilfs-Gleichungen lauten hier:

$$ydz - nzdx = 0$$
$$xdx + ydy = 0$$

Die zweite Gleichung gibt integrirt:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Wird hieraus y berechnet und der gefundene Werth in die erste Hilfs-Gleichung eingeführt, so erhält man

$$\frac{dz}{z} = n \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

und dies gibt integrirt:

$$\log z = n \arc \sin \frac{x}{a} + b$$

Setzt man hier für a seinen Werth, so ergibt sich

$$\log z = n \arc \sin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + b$$

und dies lässt sich kürzer so schreiben:

$$\log z = n \arc \operatorname{tang} \frac{x}{y} + b$$

Demnach ist das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung

$$\log z - n \arc \operatorname{tang} \frac{x}{y} = \varphi\,(x^2 + y^2)$$

Man kann dies auch so schreiben:

$$z = e^{n \arc \operatorname{tang} \frac{x}{y} + \varphi\,(x^2 + y^2)}$$

oder kürzer:

$$z = e^{n \arc \operatorname{tang} \frac{x}{y}} \,.\, F\,(x^2 + y^2)$$

wo $F\,(x^2 + y^2)$ eine willkürliche Function von $x^2 + y^2$ ist.

Aufgabe 34.

Es sei die Gleichung (Band 3, Seite 141)

$$z = p\,(x + y) - q\,(x + y)$$

zu integriren.

Die beiden Hilfs-Gleichungen lauten hier:

$$(x + y)\,dz + zdy = 0$$
$$dx + dy = 0$$

Aus der zweiten Hilfs-Gleichung folgt:

$$x + y = a$$

hiedurch geht die erste Hilfs-Gleichung über in

$$adz + zdy = 0$$

hieraus folgt:

$$a \log z + y = b$$

oder wenn man für a seinen Werth setzt:

$$(x + y) \log z + y = b$$

es ist daher:

$$(x + y) \log z + y = \varphi (x + y)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich folgender Werth von z:

$$z = e^{-\frac{y}{x+y}} F (x + y)$$

unter $F (x + y)$ eine willkürliche Function von $x + y$ verstanden.

Aufgabe 35.

Es sei (Band 3, Seite 142)

$$z = p (x - 2y) + q (2x - 3y)$$

Diese Aufgabe ist ein Specialfall der Aufgabe 32, und geht aus ihr hervor, wenn man in selber

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -2, \qquad \gamma = 2, \qquad \delta = -3$$

setzt. Man erhält sodann:

$$\log z - \int \frac{dt}{2 (1 - 2t + t^2)} = \varphi \left(\log x - \int \frac{(1 - 2t)\, dt}{2 (1 - 2t + t^2)} \right)$$

Werden die Integrationen verrichtet, und für t sein Werth $\frac{y}{x}$ gesetzt, so erhält man:

$$\log z + \frac{x}{2 (y - x)} = \varphi \left[\log (y - x) - \frac{x}{2 (y - x)} \right]$$

und hieraus folgt:

$$z = e^{-\frac{x}{2 (y - x)}} F \left[\log (y - x) - \frac{x}{2 (y - x)} \right]$$

unter $F \left[\log (y - x) - \frac{x}{2 (y - x)} \right]$ eine willkürliche Function von $\log (y - x) - \frac{x}{2 (y - x)}$ verstanden.

Lagrange's Methode der Integration partieller Differentialgleichungen.

§. 23.

Wir haben in den Paragraphen 18 bis 22 den Weg gezeigt, den man einschlagen muss, um die lineare partielle Differentialgleichung

$$Lp + Mq = N \tag{16}$$

in welchen L, M, N gegebene Functionen von x, y, z bezeichnen, zu integriren. Man muss nämlich, um die Gleichung (16) zu integriren folgende zwei simultane Differentialgleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} M dz - N dy &= 0 \\ M dx - L dy &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

sich hiebei etwa y und z als Functionen von x vorstellen, und in diesem Sinne integriren. Nehmen wir an, dass diesen beiden Gleichungen genügt wird durch

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= a \\ F_2(x, y, z) &= b \end{aligned} \tag{22}$$

unter a und b willkürliche Constante verstanden, so ist:

$$b = f(a)$$

das Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung, vorausgesetzt

erstens, dass $f(a)$ eine willkürliche Function von a bezeichnet, und

zweitens, dass in die Gleichung $b = f(a)$ für a und b die in (22) aufgestellten Werthe substituirt werden.

Um die Richtigkeit dieser Methode zu beweisen, leitet Lagrange aus der Gleichung

$$b = f(a)$$

die partielle Differentialgleichung (16) ab, und ist dies geschehen, so sieht man, dass in der That die Gleichung (16) eine blosse Folge der Gleichung

$$b = f(a)$$

ist. Differenzirt man daher die eben aufgestellte Gleichung zuerst partiell nach x und sodann partiell nach y, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{db}{dx} &= f'(a) \cdot \frac{da}{dx} \\ \frac{db}{dy} &= f'(a) \cdot \frac{da}{dy} \end{aligned}$$

Durch Division beider ergibt sich

$$\frac{\frac{db}{dx}}{\frac{db}{dy}} = \frac{\frac{da}{dx}}{\frac{da}{dy}}$$

und dies gibt von Brüchen befreit die Gleichung:

$$\frac{db}{dx} \cdot \frac{da}{dy} - \frac{db}{dy} \cdot \frac{da}{dx} = 0 \tag{26}$$

Aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a &= F_1(x, y, z) \\ b &= F_2(x, y, z) \end{aligned} \tag{22}$$

folgen:

$$\begin{aligned} da &= A dx + B dy + C dz \\ db &= E dx + F dy + G dz \end{aligned}$$

Betrachtet man nun z als Function von x und y, so ist:

$$\frac{da}{dx} = A + Cp \qquad \frac{da}{dy} = B + Cq$$

$$\frac{db}{dx} = E + Gp \qquad \frac{db}{dy} = F + Gq$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung (26) erhält man die Gleichung

$$(E + Gp)(B + Cq) - (F + Gq)(A + Cp) = 0$$

und diese vereinfacht sich und geht, wie man sieht, in folgende über:

$$BE - AF + p(BG - CF) + q(CE - AG) = 0$$

Nun ist klar, dass die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} A\,dx + B\,dy + C\,dz &= 0 \\ E\,dx + F\,dy + G\,dz &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

nicht wesentlich verschieden sein können von den zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} M\,dz - N\,dy &= 0 \\ M\,dx - L\,dy &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

denn aus den beiden Gleichungen (20) folgen durch Integration die beiden Gleichungen (22); und aus den beiden Gleichungen (22) gehen durch Differentiation die beiden Gleichungen (27) hervor.

Sucht man daher aus den beiden Gleichungen (20) dx und dz und führt man sodann die gefundenen Werthe in die beiden Gleichungen (27) ein, so müssen zwei Identitäten erscheinen, diese sind:

$$\begin{aligned} AL + BM + CN &= 0 \\ EL + FM + GN &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

Aus diesen zwei identischen Gleichungen lassen sich leicht zwei andere identische construiren, indem man nämlich aus ihnen einmal das M, und ein anderes Mal das N eliminirt. Thut man dies, so erhält man:

$$\begin{aligned} L(BE - AF) + N(BG - CF) &= 0 \\ L(AG - CE) + M(BG - CF) &= 0 \end{aligned}$$

und diese beiden Gleichungen vertreten vollständig die beiden Gleichungen (28).

Aus ihnen folgen:

$$BE - AF = -\frac{N}{L}(BG - CF)$$

$$AG - CE = -\frac{M}{L}(BG - CF)$$

Substituirt man diese Werthe von $BE - AF$ und $AG - CE$ in die Gleichung

$$BE - AF + p(BG - CF) + q(CE - AG) = 0$$

so erhält man eine Gleichung, die durch $BG - CF$ abkürzbar ist und dann sich durch eine einfache Reduction auf die Form

$$Lp + Mq = N \tag{16}$$

bringen lässt, welches in der That die vorgelegte partielle Differentialgleichung ist.

Jacobi's Integrations-Methode für lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

§. 24.

Auch Jacobi hat sich vielfach mit der Integration partieller Differentialgleichungen beschäftigt, und für die Integration linearer partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung folgende Methode gegeben.

Wäre zu integriren die partielle Differentialgleichung

$$Lp + Mq = N \tag{16}$$

so stelle man auf die beiden simultanen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} Mdz - Ndy &= 0 \\ Mdx - Ldy &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

welche sich auch folgendermassen schreiben lassen:

$$\frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N} \tag{29}$$

und integrire dieselben. Ihre Integrale bringe man sodann auf die Formen:

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= a \\ F_2(x, y, z) &= b \end{aligned} \tag{22}$$

in welcher auf der einen Seite der Gleichung die beiden willkürlichen Constanten a und b, und auf der andern Seite bestimmte Functionen von x, y, z stehen.

Die Gleichungen (22) geben differenzirt:

$$\frac{dF_1}{dx}dx + \frac{dF_1}{dy}dy + \frac{dF_1}{dz}dz = 0$$

$$\frac{dF_2}{dx}dx + \frac{dF_2}{dy}dy + \frac{dF_2}{dz}dz = 0$$

Setzt man hierin für dy und dz ihre aus den Gleichungen (29) hervorgehenden Werthe, so erhält man folgende identische Gleichungen:

$$L\frac{dF_1}{dx} + M\frac{dF_1}{dy} + N\frac{dF_1}{dz} = 0$$

$$L\frac{dF_2}{dx} + M\frac{dF_2}{dy} + N\frac{dF_2}{dz} = 0$$

hieraus schliesst Jacobi, dass die Integration der simultanen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N} \tag{29}$$

eigentlich darin besteht, zwei solche von einander verschiedene Functionen von x, y und z zu finden, welche der partiellen Differentialgleichung

$$L\frac{dF}{dx} + M\frac{dF}{dy} + N\frac{dF}{dz} = 0 \tag{30}$$

identisch Genüge leisten.

Sodann behauptet Jacobi, dass, wenn die Functionen $F_1(x, y, z)$ und $F_2(x, y, z)$ jede für sich der partiellen Differentialgleichung (30) genügt,

auch jede aus diesen Functionen zusammengesetzte Function diese Eigenschaft besitzt, nämlich der Gleichung (30) identisch zu genügen.

Denn es sei:

$$\varphi (F_1, F_2) = 0$$

eine solche Function, so wird man, wenn man die beiden Gleichungen

$$L \frac{dF_1}{dx} + M \frac{dF_1}{dy} + N \frac{dF_1}{dz} = 0$$

$$L \frac{dF_2}{dx} + M \frac{dF_2}{dy} + N \frac{dF_2}{dz} = 0$$

respective mit

$$\frac{d\varphi}{dF_1} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{dF_2}$$

multiplicirt, und sodann die Producte addirt, folgende Gleichung erhalten:

$$L\left[\frac{d\varphi}{dF_1} \cdot \frac{dF_1}{dx} + \frac{d\varphi}{dF_2} \cdot \frac{dF_2}{dx}\right] + M\left[\frac{d\varphi}{dF_1} \cdot \frac{dF_1}{dy} + \frac{d\varphi}{dF_2} \cdot \frac{dF_2}{dy}\right] + \\ + N\left[\frac{d\varphi}{dF_1} \cdot \frac{dF_1}{dz} + \frac{d\varphi}{dF_2} \cdot \frac{dF_2}{dz}\right] = 0$$

und diese gestattet folgende Schreibweise:

$$L \frac{d\varphi}{dx} + M \frac{d\varphi}{dy} + N \frac{d\varphi}{dz} = 0$$

es wird demnach der partiellen Differentialgleichung (30) Genüge geleistet, wenn man in selber statt F den Werth $\varphi (F_1, F_2)$ setzt.

§. 25.

Nach diesen vorausgeschickten Betrachtungen ergibt sich nach Jacoby für die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$L \frac{dz}{dx} + M \frac{dz}{dy} = N \tag{16}$$

folgender Weg:

Es sei $\varphi = 0$ eine Gleichung zwischen den drei Variablen x, y, z (und z sei eine Function von x und y), so erhält man, da:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0$$

ist, wenn man hieraus $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ bestimmt und diese in (16) substituirt, folgende Gleichung:

$$L \frac{d\varphi}{dx} + M \frac{d\varphi}{dy} + N \frac{d\varphi}{dz} = 0$$

und dieser geschieht Genüge, wenn man für φ irgend eine Function von $F_1 (x, y, z)$ und $F_2 (x, y, z)$ setzt.

Ist also die lineare partielle Differentialgleichung

$$Lp + Mq = N \tag{16}$$

gegeben, so integrire man die simultanen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N} \tag{29}$$

Sind

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= a \\ F_2(x, y, z) &= b \end{aligned} \tag{22}$$

die Integrale der Gleichungen (29) und bedeuten in denselben a und b willkürliche Constante, so ist

$$b = f(a)$$

das gesuchte Integrale der gegebenen Differentialgleichungen unter b eine willkürliche Function von a verstanden.

Dritter Abschnitt.

Pfaff'sche Methode der Integration totaler Differentialgleichungen der Form:

$$X dx + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 = 0 \tag{31}$$

§. 26.

Bevor wir nun weiterschreiten mit der Integration partieller Differentialgleichungen betrachten wir totale Differentialgleichungen der Form (31), in welcher X, X_1, X_2, X_3 gegebene Functionen sind von x, x_1, x_2, x_3 und suchen selbe zu integriren. Zu dem Zwecke führen wir in die Gleichung (31) für x_1 x_2 und x_3 neue Variable a_1, a_2, a_3 ein, mittelst den Substitutionen

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 (a_1, a_2, a_3, x) \\ x_2 &= \xi_2 (a_1, a_2, a_3, x) \\ x_3 &= \xi_3 (a_1, a_2, a_3, x) \end{aligned} \tag{32}$$

Aus diesen Gleichungen folgen:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{dx_1}{da_1} da_1 + \frac{dx_1}{da_2} da_2 + \frac{dx_1}{da_3} da_3 + \frac{dx_1}{dx} dx \\ dx_2 &= \frac{dx_2}{da_1} da_1 + \frac{dx_2}{da_2} da_2 + \frac{dx_2}{da_3} da_3 + \frac{dx_2}{dx} dx \\ dx_3 &= \frac{dx_3}{da_1} da_1 + \frac{dx_3}{da_2} da_2 + \frac{dx_3}{da_3} da_3 + \frac{dx_3}{dx} dx \end{aligned} \tag{33}$$

und durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung (31) nimmt selbe folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} X dx &+ X_1 \frac{dx_1}{da_1} da_1 + X_1 \frac{dx_1}{da_2} da_2 + X_1 \frac{dx_1}{da_3} da_3 + X_1 \frac{dx_1}{dx} dx + \\ &+ X_2 \frac{dx_2}{da_1} da_1 + X_2 \frac{dx_2}{da_2} da_2 + X_2 \frac{dx_2}{da_3} da_3 + X_2 \frac{dx_2}{dx} dx + \\ &+ X_3 \frac{dx_3}{da_1} da_1 + X_3 \frac{dx_3}{da_2} da_2 + X_3 \frac{dx_3}{da_3} da_3 + X_3 \frac{dx_3}{dx} dx = 0 \end{aligned} \tag{34}$$

Der Abkürzung halber setzen wir nun:

$$X + X_1 \frac{dx_1}{dx} + X_2 \frac{dx_2}{dx} + X_3 \frac{dx_3}{dx} = U \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 \frac{dx_1}{da_1} + X_2 \frac{dx_2}{da_1} + X_3 \frac{dx_3}{da_1} = A_1 \\ X_1 \frac{dx_1}{da_2} + X_2 \frac{dx_2}{da_2} + X_3 \frac{dx_3}{da_2} = A_2 \\ X_1 \frac{dx_1}{da_3} + X_2 \frac{dx_2}{da_3} + X_3 \frac{dx_3}{da_3} = A_3 \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

und haben dann statt der Gleichung (34) folgende Gleichung:

$$A_1\, da_1 + A_2\, da_2 + A_3\, da_3 + U dx = 0$$

Nun wählt Pfaff x_1, x_2, x_3 dermassen, auf dass erstens

$$U = 0$$

wird, und dass dann x in A_1, A_2 und A_3 entweder gar nicht oder nur in einem, allen gemeinschaftlichen Factor M vorkomme; demnach müssen die beiden Brüche

$$\frac{A_2}{A_1} \qquad \frac{A_3}{A_1}$$

von x unabhängig sein, d. h. es muss sein:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{A_3}{A_1}\right) = 0$$

Diese beiden Gleichungen lauten entwickelt:

$$\frac{A_1 \frac{dA_2}{dx} - A_2 \frac{dA_1}{dx}}{A_1^2} = 0, \qquad \frac{A_1 \frac{dA_3}{dx} - A_3 \frac{dA_1}{dx}}{A_1^2} = 0$$

und hieraus folgen nachstehende Gleichungen:

$$\frac{1}{A_1} \frac{dA_1}{dx} = \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{dx} = \frac{1}{A_3} \frac{dA_3}{dx}$$

Wir setzen nun jeden dieser Brüche gleich N, und erhalten sodann:

$$\frac{dA_1}{dx} = NA_1, \qquad \frac{dA_2}{dx} = NA_2, \qquad \frac{dA_3}{dx} = NA_3 \tag{37}$$

welche Gleichungen wir nun in entwickelter Gestalt darstellen wollen.

§. 27.

Zu dem Zwecke betrachten wir nachstehenden Werth von A

$$A = X_1 \frac{dx_1}{da} + X_2 \frac{dx_2}{da} + X_3 \frac{dx_3}{da} \tag{38}$$

aus diesem Ausdrucke erhalten wir die verschiedenen Werthe von A_1, A_2, A_3, wenn wir für a nach einander a_1, a_2, a_3 setzen. Differenziren wir nun die Gleichung (38) nach x, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx} = \frac{dX_1}{dx} \frac{dx_1}{da} + \frac{dX_2}{dx} \frac{dx_2}{da} + \frac{dX_3}{dx} \frac{dx_3}{da} + \\ + X_1 \frac{d^2x_1}{da\,dx} + X_2 \frac{d^2x_2}{da\,dx} + X_3 \frac{d^2x_3}{da\,dx} \end{aligned}$$

Nun ist aber wohl zu beachten, dass ursprünglich X_1, X_2, X_3 als Functionen von x, x_1, x_2, x_3 vorausgesetzt waren, dass aber dann statt x_1, x_2, x_3 vermittelst der Gleichungen (32) neue Variabeln a_1, a_2, a_3 eingeführt wurden, demnach wird, wenn man irgend ein X nach x differenzirt, dies aus vier Theilen bestehen, es ist nämlich:

$$\frac{dX_1}{dx} = \left(\frac{dX_1}{dx}\right) + \left(\frac{dX_1}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{dx} + \left(\frac{dX_1}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{dx} + \left(\frac{dX_1}{dx_3}\right)\frac{dx_3}{dx}$$

$$\frac{dX_2}{dx} = \left(\frac{dX_2}{dx}\right) + \left(\frac{dX_2}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{dx} + \left(\frac{dX_2}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{dx} + \left(\frac{dX_2}{dx_3}\right)\frac{dx_3}{dx}$$

$$\frac{dX_3}{dx} = \left(\frac{dX_3}{dx}\right) + \left(\frac{dX_3}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{dx} + \left(\frac{dX_3}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{dx} + \left(\frac{dX_3}{dx_3}\right)\frac{dx_3}{dx}$$

und daher hat man für $\frac{dA}{dx}$ folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dx} = \frac{dx_1}{da}\left[\left(\frac{dX_1}{dx}\right) + \left(\frac{dX_1}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{dx} + \left(\frac{dX_1}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{dx} + \left(\frac{dX_1}{dx_3}\right)\frac{dx_3}{dx}\right] + \\ + \frac{dx_2}{da}\left[\left(\frac{dX_2}{dx}\right) + \left(\frac{dX_2}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{dx} + \left(\frac{dX_2}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{dx} + \left(\frac{dX_2}{dx_3}\right)\frac{dx_3}{dx}\right] + \\ + \frac{dx_3}{da}\left[\left(\frac{dX_3}{dx}\right) + \left(\frac{dX_3}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{dx} + \left(\frac{dX_3}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{dx} + \left(\frac{dX_3}{dx_3}\right)\frac{dx_3}{dx}\right] + \\ + X_1\frac{d^2x_1}{da\,dx} + X_2\frac{d^2x_2}{da\,dx} + X_3\frac{d^2x_3}{da\,dx}\end{aligned} \tag{39}$$

Nun beabsichtigen wir hieraus die zweiten Differentialquotienten zu entfernen, und dies kann erreicht werden, wenn man die Gleichung

$$X + X_1\frac{dx_1}{dx} + X_2\frac{dx_2}{dx} + X_3\frac{dx_3}{dx} = 0$$

nach a differenzirt. Thut man dies, so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{da} + \frac{dX_1}{da}\cdot\frac{dx_1}{dx} + \frac{dX_2}{da}\cdot\frac{dx_2}{dx} + \frac{dX_3}{da}\cdot\frac{dx_3}{dx} + \\ + X_1\frac{d^2x_1}{da\,dx} + X_2\frac{d^2x_2}{da\,dx} + X_3\frac{d^2x_3}{da\,dx} = 0\end{aligned} \tag{40}$$

Es muss aber auch hier bemerkt werden, dass ursprünglich X, X_1, X_2, X_3 als Functionen von x, x_1, x_2, x_3 vorausgesetzt wurden, dass dann statt x_1, x_2, x_3 vermittelst der Gleichungen (32) neue Variabeln a_1, a_2, a_3 eingeführt wurden; demnach wird, wenn man irgend ein X nach a differenzirt, dies aus drei Theilen bestehen, es ist nämlich:

$$\frac{dX}{da} = \left(\frac{dX}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{da} + \left(\frac{dX}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{da} + \left(\frac{dX}{dx_3}\right)\frac{dx_3}{da}$$

$$\frac{dX_1}{da} = \left(\frac{dX_1}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{da} + \left(\frac{dX_1}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{da} + \left(\frac{dX_1}{dx_3}\right)\frac{dx_3}{da}$$

$$\frac{dX_2}{da} = \left(\frac{dX_2}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{da} + \left(\frac{dX_2}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{da} + \left(\frac{dX_2}{dx_3}\right)\frac{dx_3}{da}$$

$$\frac{dX_3}{da} = \left(\frac{dX_3}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{da} + \left(\frac{dX_3}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{da} + \left(\frac{dX_3}{dx_3}\right)\frac{dx_3}{da}$$

und demnach kömmt man, diese Werthe in (40) einführend, zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dX}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{da} + \left(\frac{dX}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{da} + \left(\frac{dX}{dx_3}\right)\frac{dx_3}{da} + \\ + \frac{dx_1}{dx}\left[\left(\frac{dX_1}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{da} + \left(\frac{dX_1}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{da} + \left(\frac{dX_1}{dx_3}\right)\frac{dx_3}{da}\right] + \\ + \frac{dx_2}{dx}\left[\left(\frac{dX_2}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{da} + \left(\frac{dX_2}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{da} + \left(\frac{dX_2}{dx_3}\right)\frac{dx_3}{da}\right] + \\ + \frac{dx_3}{dx}\left[\left(\frac{dX_3}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{da} + \left(\frac{dX_3}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{da} + \left(\frac{dX_3}{dx_3}\right)\frac{dx_3}{da}\right] + \\ + X_1\frac{d^2x_1}{da\,dx} + X_2\frac{d^2x_2}{da\,dx} + X_3\frac{d^2x_3}{da\,dx} = 0\end{aligned}$$

Subtrahirt man nun die eben aufgeschriebene Gleichung von der Gleichung (39), so verschwinden, wie beabsichtigt wurde, die zweiten Differentialquotienten, und man erhält für $\frac{dA}{dx}$ folgenden Werth:

$$\frac{dA}{dx} =$$
$$\frac{dx_1}{da}\left\{\left(\frac{dX_1}{dx}\right)-\left(\frac{dX}{dx_1}\right)+\left[\left(\frac{dX_1}{dx_2}\right)-\left(\frac{dX_2}{dx_1}\right)\right]\frac{dx_2}{dx}+\left[\left(\frac{dX_1}{dx_3}\right)-\left(\frac{dX_3}{dx_1}\right)\right]\frac{dx_3}{dx}\right\}+$$
$$+\frac{dx_2}{da}\left\{\left(\frac{dX_2}{dx}\right)-\left(\frac{dX}{dx_2}\right)+\left[\left(\frac{dX_2}{dx_1}\right)-\left(\frac{dX_1}{dx_2}\right)\right]\frac{dx_1}{dx}+\left[\left(\frac{dX_2}{dx_3}\right)-\left(\frac{dX_3}{dx_2}\right)\right]\frac{dx_3}{dx}\right\}+$$
$$+\frac{dx_3}{da}\left\{\left(\frac{dX_3}{dx}\right)-\left(\frac{dX}{dx_3}\right)+\left[\left(\frac{dX_3}{dx_1}\right)-\left(\frac{dX_1}{dx_3}\right)\right]\frac{dx_1}{dx}+\left[\left(\frac{dX_3}{dx_2}\right)-\left(\frac{dX_2}{dx_3}\right)\right]\frac{dx_2}{dx}\right\}$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$\left(\frac{dX_\alpha}{dx_\beta}\right)-\left(\frac{dX_\beta}{dx_\alpha}\right)=(\alpha,\ \beta)$$

so gestattet das $\frac{dA}{dx}$ folgende Schreibweise:

$$\frac{dA}{dx}=\frac{dx_1}{da}\left\{(1,0)+(1,2)\frac{dx_2}{dx}+(1,3)\frac{dx_3}{dx}\right\}+$$
$$+\frac{dx_2}{da}\left\{(2,0)+(2,1)\frac{dx_1}{dx}+(2,3)\frac{dx_3}{dx}\right\}+$$
$$+\frac{dx_3}{da}\left\{(3,0)+(3,1)\frac{dx_1}{dx}+(3,2)\frac{dx_2}{dx}\right\}$$

Beachtet man noch, dass vermöge der oben eingeführten Bezeichnung

$$(\alpha,\ \alpha)=\left(\frac{dX_\alpha}{dx_\alpha}\right)-\left(\frac{dX_\alpha}{dx_\alpha}\right)=0$$

ist, so erhält man:

$$\frac{dA}{dx}=\frac{dx_1}{da}\left\{(1,0)+(1,1)\frac{dx_1}{dx}+(1,2)\frac{dx_2}{dx}+(1,3)\frac{dx_3}{dx}\right\}+$$
$$+\frac{dx_2}{da}\left\{(2,0)+(2,1)\frac{dx_1}{dx}+(2,2)\frac{dx_2}{dx}+(2,3)\frac{dx_3}{dx}\right\}+$$
$$+\frac{dx_3}{da}\left\{(3,0)+(3,1)\frac{dx_1}{dx}+(3,2)\frac{dx_2}{dx}+(3,3)\frac{dx_3}{dx}\right\}$$

Setzt man hierein für a nach einander a_1, a_2 und a_3, so erhält man aus dieser Formel die Werthe für

$$\frac{dA_1}{dx},\qquad \frac{dA_2}{dx},\qquad \frac{dA_3}{dx}$$

Nun soll, vermöge der Gleichungen (37), welche der Grössen a_1, a_2, a_3 man auch für a setze, stets

$$\frac{dA}{dx}=NA$$

sein, oder wenn man im zweiten Theile dieser Gleichung für A seinen in (38) aufgestellten Werth setzt, so hat man:

$$\frac{dA}{dx}=NX_1\frac{dx_1}{da}+NX_2\frac{dx_2}{da}+NX_3\frac{dx_3}{da}$$

Die beiden Werthe, die wir nun für $\frac{dA}{dx}$ gegeben, sind einander gleich, wenn folgendes System von Gleichungen stattfindet:

$$NX_1 = (1,0) + (1,1)\frac{dx_1}{dx} + (1,2)\frac{dx_2}{dx} + (1,3)\frac{dx_3}{dx}$$
$$NX_2 = (2,0) + (2,1)\frac{dx_1}{dx} + (2,2)\frac{dx_2}{dx} + (2,3)\frac{dx_3}{dx}$$
$$NX_3 = (3,0) + (3,1)\frac{dx_1}{dx} + (3,2)\frac{dx_2}{dx} + (3,3)\frac{dx_3}{dx}$$

Diese drei Gleichungen reichen aber nicht hin zur Bestimmung der vier Unbekannten x_1, x_2, x_3 und N, weil zu diesem Zwecke offenbar vier Gleichungen erforderlich sind.

Um nun diese vierte Gleichung zu finden, verfahre man auf folgende Art:

Man multiplicire die drei so eben aufgestellten Gleichungen der Reihe nach mit

$$\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{dx_2}{dx}, \quad \frac{dx_3}{dx}$$

addire dieselben, bemerke aber zugleich, dass

$$(\alpha, \beta) = -(\beta, \alpha)$$

ist, hiedurch erhält man:

$$N\left[X_1\frac{dx_1}{dx} + X_2\frac{dx_2}{dx} + X_3\frac{dx_3}{dx}\right] = (1,0)\frac{dx_1}{dx} + (2,0)\frac{dx_2}{dx} + (3,0)\frac{dx_3}{dx}$$

Nun ist aber

$$X + X_1\frac{dx_1}{dx} + X_2\frac{dx_2}{dx} + X_3\frac{dx_3}{dx} = 0$$

folglich wird

$$-NX = (1,0)\frac{dx_1}{dx} + (2,0)\frac{dx_2}{dx} + (3,0)\frac{dx_3}{dx}$$

und diese Gleichung gestattet folgende Schreibweise:

$$NX = (0,0) + (0,1)\frac{dx_1}{dx} + (0,2)\frac{dx_2}{dx} + (0,3)\frac{dx_3}{dx}$$

§. 28.

Die Aufgabe, welche sich Pfaff stellte, war die, in die gegebene Gleichung

$$Xdx + X_1dx_1 + X_2dx_2 + X_3dx_3 = 0 \tag{31}$$

für x_1, x_2, x_3 neue Variable a_1, a_2, a_3 einzuführen mittelst der Substitutionen

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1(a_1, a_2, a_3, x) \\ x_2 &= \xi_2(a_1, a_2, a_3, x) \\ x_3 &= \xi_3(a_1, a_2, a_3, x) \end{aligned} \tag{32}$$

und diese neuen Variablen so zu wählen, auf dass die Gleichung (31) übergehe in nachstehende Gleichung:

$$A_1da_1 + A_2da_2 + A_3da_3 = 0$$

woselbst in A_1, A_2, A_3 entweder gar kein x vorkömmt, oder nur in einem, ihnen allen gemeinschaftlichen Factor. Wir haben im Laufe unserer Rechnung

eine Hilfsgrösse N eingeführt, und sind schliesslich zu vier Gleichungen gelangt, aus welchen sich x_1, x_2, x_3 und N berechnen lassen.

Diese vier Gleichungen sind nachstehende:

$$\begin{aligned}(0,0) + (0,1)\frac{dx_1}{dx} + (0,2)\frac{dx_2}{dx} + (0,3)\frac{dx_3}{dx} &= NX \\ (1,0) + (1,1)\frac{dx_1}{dx} + (1,2)\frac{dx_2}{dx} + (1,3)\frac{dx_3}{dx} &= NX_1 \\ (2,0) + (2,1)\frac{dx_1}{dx} + (2,2)\frac{dx_2}{dx} + (2,3)\frac{dx_3}{dx} &= NX_2 \\ (3,0) + (3,1)\frac{dx_1}{dx} + (3,2)\frac{dx_2}{dx} + (3,3)\frac{dx_3}{dx} &= NX_3\end{aligned} \tag{41}$$

Wir nehmen nun an, dass sich diese vier Gleichungen integriren lassen, und dass sich aus ihnen das N ergibt und x_1, x_2, x_3 in der Form

$$\begin{aligned}x_1 &= \xi_1 (a_1, a_2, a_3, x) \\ x_2 &= \xi_2 (a_1, a_2, a_3, x) \\ x_3 &= \xi_3 (a_1, a_2, a_3, x)\end{aligned} \tag{32}$$

woselbst a_1, a_2, a_3 willkürliche Constante bedeuten, und behaupten sodann, dass, wenn man in die vorgelegte Gleichung (31) für x_1, x_2, x_3 diese so eben gefundenen Werthe einführt, unter a_1, a_2, a_3 Variable verstanden, man hiedurch auf die Gleichung

$$A_1 da_1 + A_2 da_2 + A_3 da_3 = 0$$

geführt wird. Denn verfolgt man mit den so eben angegebenen Werthen von x_1, x_2, x_3 Schritt für Schritt den früher betretenen Weg, so gelangt man zu den Gleichungen (41), und diese werden durch die Gleichungen (32) befriedigt, und zwar sowohl, wenn a_1, a_2, a_3 als Constante, als auch, wenn selbe als Variable angesehen werden; denn in den Differentialgleichungen (41) kommen blos nach x genommene Differentialquotienten vor, d. h. Differentialquotienten, in denen die a_1, a_2, a_3 als constant betrachtet werden.

§. 29.

Wir sahen im Vorhergehenden, dass, wenn man in die Gleichung

$$X dx + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 = 0 \tag{31}$$

für x_1, x_2, x_3 nachstehende Substitutionen macht:

$$\begin{aligned}x_1 &= \xi_1 (a_1, a_2, a_3, x) \\ x_2 &= \xi_2 (a_1, a_2, a_3, x) \\ x_3 &= \xi_3 (a_1, a_2, a_3, x)\end{aligned} \tag{32}$$

man die Gleichung

$$A_1 da_1 + A_2 da_2 + A_3 da_3 = 0$$

erhält, aus welcher jede Spur von x verschwunden ist. Man kann nun gleich im Laufe der Rechnung auf diesen Umstand Rücksicht nehmen, und selbe dem entsprechend vereinfachen.

Statt nämlich in die vorgelegte Gleichung (31) für x_1, x_2, x_3 die in (32) aufgestellten Substitutionen zu machen, setze man in den Gleichungen

(31) und (32) $x = 0$, man erhält sodann, da hiedurch $dx = 0$ wird, statt der Gleichung (31) die einfachere Gleichung

$$X_1^0\, dx_1 + X_2^0\, dx_2 + X_3^0\, dx_3 = 0$$

woselbst X_1^0, X_2^0, X_3^0 solche Functionen von x_1, x_2, x_3 sind, welche aus X_1, X_2, X_3 entstehen, wenn man in denselben $x = 0$ setzt. Schreibt man dann in der so eben vereinfachten Gleichung

$$x_1 = \xi_1 (a_1, a_2, a_3, 0)$$
$$x_2 = \xi_2 (a_1, a_2, a_3, 0)$$
$$x_3 = \xi_3 (a_1, a_2, a_3, 0)$$

so gelangt man offenbar zur selben Gleichung

$$A_1\, da_1 + A_2\, da_2 + A_3\, da_3 = 0$$

Sollte der dem x beigelegte Werth 0 Unbequemlichkeiten verursachen, so kann man für x jeden anderen Zahlwerth setzen.

§. 30.

Sei z. B. die Gleichung (siehe meine im Jahre 1854 veröffentlichte Arbeit in Grunert's Archiv für Mathematik, 23. Band, Seite 453)

$$x_1\, dx + x_2\, dx_1 + x_3\, dx_2 + x\, dx_3 = 0$$

zu integriren.

Für diesen Fall ist

$$X = x_1, \qquad X_1 = x_2, \qquad X_2 = x_3, \qquad X_3 = x$$

ferner ist:

$$(0,1) = \frac{dX}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx} = 1$$
$$(0,2) = \frac{dX}{dx_2} - \frac{dX_2}{dx} = 0$$
$$(0,3) = \frac{dX}{dx_3} - \frac{dX_3}{dx} = -1$$
$$(1,2) = \frac{dX_1}{dx_2} - \frac{dX_2}{dx_1} = 1$$
$$(1,3) = \frac{dX_1}{dx_3} - \frac{dX_3}{dx_1} = 0$$
$$(2,3) = \frac{dX_2}{dx_3} - \frac{dX_3}{dx_2} = 1$$

folglich sind die vier Gleichungen, aus denen

$$N, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

bestimmt werden sollen, folgende:

$$\frac{dx_1}{dx} - \frac{dx_3}{dx} = Nx_1$$
$$-1 + \frac{dx_2}{dx} = Nx_2$$
$$-\frac{dx_1}{dx} + \frac{dx_3}{dx} = Nx_3$$
$$1 - \frac{dx_2}{dx} = Nx$$

Durch Addition der ersten und dritten Gleichung ergibt sich

$$N(x_1 + x_3) = 0$$

und durch Addition der zweiten und vierten

$$N(x + x_2) = 0$$

Beiden so eben aufgestellten Gleichungen genügt man für

$$N = 0$$

Setzt man nun diesen Werth von N in obige vier Gleichungen, so erhält man blos zwei von einander verschiedene Gleichungen, nämlich

$$\frac{dx_1}{dx} - \frac{dx_3}{dx} = 0$$

$$-1 + \frac{dx_2}{dx} = 0$$

woraus sich durch Integration

$$x_1 - x_3 = a_1$$

$$x_2 - x = a_2$$

ergibt, unter a_1 und a_2 willkürliche Constanten verstanden. Diese zwei Gleichungen reichen aber nicht hin zur Bestimmung von x_1, x_2 und x_3.

Wir sehen also, dass uns hier der von Pfaff gelehrte Weg nicht ganz zum gewünschten Ziele führt.

Wir setzen daher, um die Gleichung

$$x_1\,dx + x_2\,dx_1 + x_3\,dx_2 + x\,dx_3 = 0$$

zu integriren, einstweilen blos für x_1 und x_2 ihre Werthe, nämlich:

$$x_1 = a_1 + x_3$$

$$x_2 = a_2 + x$$

hiebei a_1 und a_2 als neue Variable betrachtet, und erhalten dadurch

$$(a_1 + 2x_3)\,dx + (a_2 + 2x)\,dx_3 + (a_2 + x)\,da_1 + x_3\,da_2 = 0$$

Jetzt ist noch für x_3 eine solche Function von x, a_1, a_2, a_3 zu substituiren, auf dass diese Gleichung die Form

$$A_1\,da_1 + A_2\,da_2 + A_3\,da_3 = 0$$

annimmt, und folglich identisch auf $0 = 0$ führt, wenn man a_1, a_2, a_3 als Constante ansieht.

Unter Voraussetzung constanter Werthe von a_1 und a_2 geht aber die obige Gleichung über in

$$(a_1 + 2x_3)\,dx + (a_2 + 2x)\,dx_3 = 0$$

und diese gibt integrirt:

$$a_1 x + a_2 x_3 + 2 x x_3 = a_3$$

woraus

$$x_3 = \frac{a_3 - a_1 x}{a_2 + 2x}$$

folgt. Führt man nun diesen Werth von x_3 und den daraus hervorgehenden Werth von dx_3, nämlich:

$$dx_3 = \frac{-(a_1 a_2 + 2a_3)\,dx - (a_2 x + 2x^2)\,da_1 + (a_1 x - a_3)\,da_2 + (a_2 + 2x)\,da_3}{(a_2 + 2x)^2}$$

in die Gleichung

$$(a_1 + 2x_3)\,dx + (a_2 + 2x)\,dx_3 + (a_2 + x)\,da_1 + x_3\,da_2 = 0$$

ein, so erhält man nach einiger Reduction die Gleichung:

$$a_2\,da_1 + da_3 = 0$$

Wenn man daher in die Gleichung:

$$x_1\,dx + x_2\,dx_1 + x_3\,dx_2 + x\,dx_3 = 0$$

die Substitutionen:

$$x_1 = a_1 + \frac{a_3 - a_1 x}{a_2 + 2x}$$
$$x_2 = a_2 + x$$
$$x_3 = \frac{a_3 - a_1 x}{a_2 + 2x}$$

durchführt, so geht dieselbe über in:

$$a_2\,da_1 + da_3 = 0$$

Aus obigen drei Gleichungen folgt aber:

$$a_1 = x_1 - x_3$$
$$a_2 = x_2 - x$$
$$a_3 = xx_1 + x_2 x_3$$

demnach kann man die vorgelegte Gleichung auch so schreiben:

$$(x_2 - x)\,d\,(x_1 - x_3) + d\,(xx_1 + x_2 x_3) = 0$$

und hieraus sieht man, dass man ihr genügt, wenn man

$$x_1 - x_3 = C_1$$
$$xx_1 + x_2 x_3 = C_2$$

setzt, unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden.

Anmerkung. Durch Substitution von

$$x_1 = a_1 + \frac{a_3 - a_1 x}{a_2 + 2x}, \qquad x_2 = a_2 + x, \qquad x_3 = \frac{a_3 - a_1 x}{a_2 + 2x}$$

in die Gleichung

$$x_1\,dx + x_2\,dx_1 + x_3\,dx_2 + x\,dx_3 = 0$$

gelangten wir zur Gleichung

$$a_2\,da_1 + da_3 = 0$$

Man kann auch nach §. 29 kürzer zu dieser Gleichung gelangen, wenn man die Substitutionen:

$$x_1 = a_1 + \frac{a_3}{a_2}, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = \frac{a_3}{a_2}$$

in die Gleichung

$$x_2\,dx_1 + x_3\,dx_2 = 0$$

vollführt.

Vierter Abschnitt.

Integration partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung von nicht linearer Form.

§. 31.

Eine Integrationsmethode für partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung von nicht linearer Form zwischen einer abhängigen und zweier unabhängigen Variablen verdankt man Lagrange.

Nach ihm beschäftigte sich Pfaff mit demselben Gegenstande, und lehrte die Integration partieller nicht linearer Differentialgleichungen für eine abhängige und beliebig vielen unabhängigen Variablen.

Jacobi stellte die Pfaff'schen Arbeiten in höchst eleganter Weise dar, und zeigte, welche wesentliche Vereinfachungen die Pfaff'sche Methode fähig ist. Ich will nun auf Grundlage der genannten Arbeiten zeigen, wie Differentialgleichungen der Form

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0 \tag{42}$$

die man sich auch so geschrieben denken kann:

$$q = \psi(x, y, z, p)$$

zu integriren seien.

Pfaff substituirt in die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{17}$$

statt q seinen Werth, und erhält hiedurch für dz nachstehenden Ausdruck:

$$dz = p\,dx + \psi(x, y, z, p)\,dy \tag{43}$$

in welchem die vier Variablen

$$x, y, z, p$$

erscheinen. Nun zeigt Pfaff, dass er stets im Stande ist, die eben aufgeschriebene Gleichung folgendermassen darzustellen:

$$K_1\,dC_1 + K_2\,dC_2 = 0 \tag{44}$$

in welchen K_1, K_2, C_1, C_2 Functionen sind von x, y, z und p.

Der Gleichung (44) wird Genüge geleistet:

Erstens, wenn man $F_1 = a$ und $F_2 = b$ setzt, unter a und b willkürliche Constante verstanden;

Zweitens, wenn man C_1 gleich einer willkürlichen Function von C_2, etwa $C_1 = f(C_2)$ setzt, hiedurch geht die Gleichung (44) über in:

$$[K_1 f'(C_2) + K_2]\, dC_2 = 0$$

und diese wird befriedigt, für

$$K_1 f'(C_2) + K_2 = 0$$

Drittens, wenn man $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ setzt.

Jede dieser Annahmen führt in der Regel zu einer eigenen Lösung der vorgelegten Differentialgleichung; man hat nämlich

Im ersten Falle aus den beiden Gleichungen:

$$C_1 = a, \qquad C_2 = b$$

das p zu eliminiren, und findet so eine Auflösung der partiellen Differentialgleichung, in welcher zwei willkürliche Constante a und b erscheinen;

Im zweiten Falle aus den beiden Gleichungen:

$$C_1 = f(C_2), \qquad K_1 f'(C_2) + K_2 = 0$$

das p zu eliminiren, und findet so eine Auflösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung, in welcher eine willkürliche Function erscheint; endlich

Im dritten Falle aus den beiden Gleichungen

$$K_1 = 0, \qquad K_2 = 0$$

das p zu eliminiren. Im Resultate der Elimination erscheint hier weder eine willkürliche Constante noch eine willkürliche Function.

Alle diese drei Lösungen haben einen bestimmten, unter sich verschiedenen Charakter. Pfaff hat nur die zweite dieser Lösungen angegeben, Jacobi die übrigen.

§. 32.

Nehmen wir also die partielle Differentialgleichung

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0 \tag{42}$$

vor, suchen hieraus das q, welches

$$q = \psi(x, y, z, p)$$

sei, und substituiren diesen Werth in

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{17}$$

hiedurch erhält man:

$$dz = p\,dx + \psi(x, y, z, p)\, dy \tag{43}$$

und diese Gleichung denkt sich Pfaff in folgender Weise geschrieben:

$$-dz + p\,dx + \psi(x, y, z, p)\, dy + 0 \,.\, dp = 0 \tag{44}$$

in welchen der Coefficient von dp gleich Null ist, und behandelt sie nach der im vorigen Abschnitte auseinandergesetzten Methode. Identificirt man daher diese Gleichung mit der Gleichung

$$X dx + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 = 0 \tag{31}$$

so hat man zu setzen:

statt:	X	-1
"	X_1	p
"	X_2	$\psi(x, y, z, p)$
"	X_3	0
"	x	z
"	x_1	x
"	x_2	y
"	x_3	p

Ferner hat man:

$$(0,1) = \frac{dX}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx} = 0$$
$$(0,2) = \frac{dX}{dx_2} - \frac{dX_2}{dx} = -\frac{d\psi(x, y, z, p)}{dz}$$
$$(0,3) = \frac{dX}{dx_3} - \frac{dX_3}{dx} = 0$$
$$(1,2) = \frac{dX_1}{dx_2} - \frac{dX_2}{dx_1} = -\frac{d\psi(x, y, z, p)}{dx}$$
$$(1,3) = \frac{dX_1}{dx_3} - \frac{dX_3}{dx_1} = 1$$
$$(2,3) = \frac{dX_2}{dx_3} - \frac{dX_3}{dx_2} = \frac{d\psi(x, y, z, p)}{dp}.$$

Demnach sind die vier Differentialgleichungen (41), welche in dem Probleme des vorigen Abschnittes zur Bestimmung von x_1, x_2, x_3 und N dienten, und also hier zur Bestimmung von x, y, p und N erforderlich sind, nachstehende:

$$-\frac{d\psi(x, y, z, p)}{dz} \cdot \frac{dy}{dz} = -N$$
$$-\frac{d\psi(x, y, z, p)}{dx} \cdot \frac{dy}{dz} + \frac{dp}{dz} = Np$$
$$\frac{d\psi(x, y, z, p)}{dz} + \frac{d\psi(x, y, z, p)}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} + \frac{d\psi(x, y, z, p)}{dp} \cdot \frac{dp}{dz} = N\psi(x, y, z, p)$$
$$-\frac{dx}{dz} - \frac{d\psi(x, y, z, p)}{dp} \cdot \frac{dy}{dz} = 0$$

Schreibt man der Kürze halber statt $\psi(x, y, z, p)$ blos ψ, und multiplicirt man sämmtliche Gleichungen mit dz, so gestatten diese Gleichungen folgende Schreibweise:

$$\frac{d\psi}{dz} \cdot dy = Ndz$$
$$-\frac{d\psi}{dx} \cdot dy + dp = Npdz$$
$$\frac{d\psi}{dz} dz + \frac{d\psi}{dx} dx + \frac{d\psi}{dp} dp = N\psi dz$$
$$dx + \frac{d\psi}{dp} dy = 0$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen das N, indem man nämlich aus der ersten Gleichung N sucht, und dasselbe in die anderen Gleichungen einsetzt, so erhält man:

$$-\frac{d\psi}{dx}\,dy + dp = p\,\frac{d\psi}{dz}\,dy$$
$$\frac{d\psi}{dz}\,dz + \frac{d\psi}{dx}\,dx + \frac{d\psi}{dp}\,dp = \psi\,\frac{d\psi}{dz}\,dy$$
$$dx + \frac{d\psi}{dp}\,dy = 0$$

Aus den ersten dieser Gleichungen folgt:

$$dp = \left(\frac{d\psi}{dx} + p\,\frac{d\psi}{dz}\right) dy$$

aus der letzten folgt:

$$dx = -\frac{d\psi}{dp}\,dy$$

und diese Werthe in die zweite Gleichung eingeführt, liefert:

$$\frac{d\psi}{dz}\,dz - \frac{d\psi}{dx}\cdot\frac{d\psi}{dp}\,dy + \frac{d\psi}{dp}\left(\frac{d\psi}{dx} + p\,\frac{d\psi}{dz}\right) dy = \psi\,\frac{d\psi}{dz}\,dy$$

und hieraus folgt:

$$dz = \left(\psi - p\,\frac{d\psi}{dp}\right) dy$$

Die drei Gleichungen, welche demnach zur Bestimmung von x, y und p dienen, lauten somit:

$$\begin{aligned} dp &= \left(\frac{d\psi}{dx} + p\,\frac{d\psi}{dz}\right) dy \\ dx &= -\frac{d\psi}{dp}\,dy \\ dz &= \left(\psi - p\,\frac{d\psi}{dp}\right) dy \end{aligned} \qquad (45)$$

§. 33.

Um diese drei Gleichungen einfacher darzustellen, denke man sich die gegebene partielle Differentialgleichung in der Form

$$\varphi\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0 \qquad (42)$$

gegeben. Sie wird identisch, wenn man für q ihren Werth $\psi\,(x,\ y,\ z,\ p)$ einführt. Eine identische Gleichung bleibt aber identisch, wenn man sie nach was immer für einer Grösse differenzirt, demnach hat man, wenn man die Gleichung (42) zuerst nach x, sodann nach z und schliesslich nach p differenzirt, die Gleichungen:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dq}\cdot\frac{d\psi}{dx} = 0$$
$$\frac{d\varphi}{dz} + \frac{d\varphi}{dq}\cdot\frac{d\psi}{dz} = 0$$
$$\frac{d\varphi}{dp} + \frac{d\varphi}{dq}\cdot\frac{d\psi}{dp} = 0$$

aus welchen $\frac{d\psi}{dx}$, $\frac{d\psi}{dz}$ und $\frac{d\psi}{dp}$ berechnet werden können. Aus ihnen ergeben sich:

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dq}}$$

$$\frac{d\psi}{dz} = -\frac{\frac{d\varphi}{dz}}{\frac{d\varphi}{dq}}$$

$$\frac{d\psi}{dp} = -\frac{\frac{d\varphi}{dp}}{\frac{d\varphi}{dq}}$$

Durch Einführung dieser Werthe gehen die Gleichungen (45) über in:

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dq}\,dx &= \frac{d\varphi}{dp}\,dy \\
\frac{d\varphi}{dq}\,dz &= \left(\psi\,\frac{d\varphi}{dq} + p\,\frac{d\varphi}{dp}\right) dy \\
\frac{d\varphi}{dq}\,dp &= -\left(\frac{d\varphi}{dx} + p\,\frac{d\varphi}{dz}\right) dy
\end{aligned}$$

Setzt man in die zweite dieser Gleichungen vorerst statt ψ seinen Werth q, setzt man ferner der Kürze halber

$$p\,\frac{d\varphi}{dp} + q\,\frac{d\varphi}{dq} = P$$

so erhält man aus der zweiten Gleichung

$$dy = \frac{1}{P} \cdot \frac{d\varphi}{dq}\,dz$$

Diesen Werth in die erste und dritte Gleichung eingeführt, liefert:

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{1}{P} \cdot \frac{d\varphi}{dp} \cdot dz \\
dp &= -\frac{1}{P}\left(\frac{d\varphi}{dx} + p\,\frac{d\varphi}{dz}\right) dz
\end{aligned}$$

§. 34.

Soll daher die partielle Differentialgleichung

$$\varphi\,(x,\, y,\, z,\, p,\, q) = 0 \tag{42}$$

integrirt werden, so stelle man vor Allem folgende drei simultane Differentialgleichungen auf:

$$\begin{aligned}
Pdx &= \frac{d\varphi}{dp} \cdot dz \\
Pdy &= \frac{d\varphi}{dq} \cdot dz \\
Pdp &= -\left(\frac{d\varphi}{dx} + p\,\frac{d\varphi}{dz}\right) dz
\end{aligned} \tag{46}$$

woselbst

$$P = p\,\frac{d\varphi}{dp} + q\,\frac{d\varphi}{dq} \tag{47}$$

ist, und integrire dieselben. Nehmen wir an, es ergeben sich als Integrale dieser Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x &= \xi\,(a_1,\, a_2,\, a_3,\, z) \\
y &= \eta\,(a_1,\, a_2,\, a_3,\, z) \\
p &= \varkappa\,(a_1,\, a_2,\, a_3,\, z)
\end{aligned} \tag{48}$$

so führe man in die Gleichung

$$dz = p\,dx + \psi\,(x,\ y,\ z,\ p)\,dy \tag{43}$$

für x, y, p neue Variable a_1, a_2, a_3 ein mittelst der Gleichungen (48), man erhält auf diese Weise eine Gleichung folgender Gestalt:

$$A_1\,da_1 + A_2\,da_2 + A_3\,da_3 = 0$$

in welcher A_1, A_2, A_3 reine Functionen sind von a_1, a_2, a_3. Diese Gleichung lässt sich stets nach den in dem ersten Abschnitte gezeigten Methoden auf die Form

$$K_1\,dC_1 + K_2\,dC_2 = 0 \tag{44}$$

bringen. Wie man dann weiter zum Integrale der vorgelegten Gleichung gelangt, wurde im §. 16 dargelegt.

Beispiele über die Integration nicht linearer partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung.

§. 35.

1. Beispiel.

Es sei zu integriren die Gleichung (3. Band, Seite 64)

$$pq - 1 = 0$$

Um selbe zu integriren, stelle man folgende drei Hilfs-Differentialgleichungen auf:

$$P\,dx = \frac{d\varphi}{dp}\,dz$$

$$P\,dy = \frac{d\varphi}{dq}\,dz$$

$$P\,dp = -\left(\frac{d\varphi}{dx} + p\,\frac{d\varphi}{dz}\right)dz$$

woselbst

$$P = p\,\frac{d\varphi}{dp} + q\,\frac{d\varphi}{dq}$$

ist. Da in unserem Beispiele

$$\varphi = pq - 1$$

ist, so hat man:

$$\frac{d\varphi}{dp} = q, \qquad \frac{d\varphi}{dq} = p, \qquad \frac{d\varphi}{dx} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dz} = 0$$

demnach ist:

$$P = 2pq$$

und obige drei Differentialgleichungen lauten:

$$2pq\,dx = q\,dz$$

$$2pq\,dy = p\,dz$$

$$2pq\,dp = 0$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$p = a_1$$

unter a_1 eine willkürliche Constante verstanden. Die ersten zwei Gleichungen werden hiedurch

$$2\,a_1\,dx = dz$$
$$2\,q\,dy = dz$$

Die erste dieser Gleichungen liefert integrirt:

$$2\,a_1\,x = z + a_2$$

unter a_2 eine willkürliche Constante verstanden. Die Gleichung

$$2\,q\,dy = dz$$

geht, da $q = \frac{1}{p}$, d. h. $q = \frac{1}{a_1}$ ist, über in

$$\frac{2}{a_1}\,dy = dz$$

hieraus folgt:

$$2\,dy = a_1\,dz$$

und durch Integration erhält man:

$$2y = a_1 z + a_3$$

Die Integrale der drei Hilfs-Differentialgleichungen sind daher:

$$p = a_1$$
$$2\,a_1\,x = z + a_2$$
$$2y = a_1 z + a_3$$

und aus ihnen folgen:

$$x = \frac{z}{2\,a_1} + \frac{a_2}{2\,a_1} \qquad a_1 = p$$
$$y = \frac{a_1 z}{2} + \frac{a_3}{2} \qquad a_2 = 2px - z$$
$$p = a_1 \qquad a_3 = 2y - pz$$

Führt man nun in die Gleichung

$$dz = p\,dx + \frac{1}{p}\,dy$$

für x, y und p die so eben aufgestellten Werthe ein, indem man a_1, a_2, a_3 als neue Variable betrachtet, so hat man, da

$$dx = \frac{a_1\,(dz + da_2) - (z + a_2)\,da_1}{2\,a_1^2}$$
$$dy = \tfrac{1}{2}\,a_1\,dz + \tfrac{1}{2}\,z\,da_1 + \tfrac{1}{2}\,da_3$$

ist, statt obiger Gleichung folgende:

$$dz = \frac{a_1\,(dz + da_2) - (z + a_2)\,da_1}{2\,a_1} + \frac{1}{2\,a_1}\,[a_1\,dz + z\,da_1 + da_3]$$

oder reducirt:

$$a_1\,da_2 - a_2\,da_1 + da_3 = 0$$

Man kann diese Gleichung beiderseits durch a_1^2 dividiren, und erhält dann

$$\frac{a_1\,da_2 - a_2\,da_1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2}\,da_3 = 0$$

und dies lässt sich auch so schreiben:

$$d\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \frac{1}{a_1^2}\, d a_3 = 0$$

welche nun die gewünschte Form

$$K_1 d C_1 + K_2 d C_2 = 0$$

hat.

Setzt man hierein statt a_1, a_2, a_3 ihre Werthe, nämlich

$$a_1 = p$$
$$a_2 = 2px - z$$
$$a_3 = 2y - pz$$

so erhält man:

$$d\left(2x - \frac{z}{p}\right) + \frac{1}{p^2}\, d\,(2y - pz) = 0$$

oder von Brüchen befreit:

$$p^2 d\left(2x - \frac{z}{p}\right) + d\,(2y - pz) = 0$$

was entwickelt zur vorgelegten Gleichung

$$dz = p\,dx + \frac{1}{p}\, dy$$

führt.

Dieser Gleichung genügt man nun:

Erstens, wenn man

$$2x - \frac{z}{p} = C_1$$
$$2y - pz = C_2$$

setzt, unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden. Aus dieser Gleichung folgt durch Elimination von p

$$z^2 = (2x - C_1)\,(2y - C_2)$$

Zweitens, wenn man

$$2x - \frac{z}{p} = \varphi\,(2y - pz)$$

setzt, unter $\varphi\,(2y - pz)$ eine willkürliche Function von $2y - pz$ verstanden. Setzt man aber

$$2x - \frac{z}{p} = \varphi\,(2y - pz)$$

so geht unsere Gleichung

$$p^2 d\left(2x - \frac{z}{p}\right) + d\,(2y - pz) = 0$$

über in:

$$p^2 \varphi'\,(2y - pz) + 1 = 0$$

Eliminirt man nun aus den beiden Gleichungen

$$2x - \frac{z}{p} = \varphi\,(2y - pz)$$
$$p^2 \varphi'\,(2y - pz) + 1 = 0$$

das p, so ist die resultirende Endgleichung das vollständige Integrale der vorgelegten partiellen Differentialgleichung.

2. Beispiel.

Es sei zu integriren die partielle Differentialgleichung (Band 3, Seite 68)

$$p^2 + q^2 = 1$$

Behufs Aufstellung der drei Hilfs-Differentialgleichungen construiren wir aus

$$\varphi = p^2 + q^2 - 1$$

nachstehende Formeln:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dz} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dp} = 2p, \qquad \frac{d\varphi}{dq} = 2q$$

Alsdann ist

$$P = 2p^2 + 2q^2 = 2$$

und die drei Hilfs-Gleichungen lauten:

$$dx = p\,dz$$
$$dy = q\,dz$$
$$dp = 0$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$p = a_1$$

unter a_1 eine willkürliche Constante verstanden. Die erste Gleichung wird hiedurch

$$dx = a_1\,dz$$

und gibt integrirt:

$$x = a_1 z + a_2$$

Die zweite Gleichung wird, da aus der vorgelegten Gleichung $q = \sqrt{1-p^2}$ folgt:

$$dy = \sqrt{1 - a_1^2}\,dz$$

und gibt integrirt:

$$y = \sqrt{1 - a_1^2}\,z + a_3$$

Die Integrale der drei Hilfs-Differentialgleichungen sind daher:

$$p = a_1$$
$$x = a_1 z + a_2$$
$$y = \sqrt{1 - a_1^2}\,z + a_3$$

und aus ihnen folgen:

$$a_1 = p$$
$$a_2 = x - pz$$
$$a_3 = y - \sqrt{1 - p^2}\,.\,z$$

Führt man nun in die Gleichung

$$dz = p\,dx + \sqrt{1 - p^2}\,dy$$

für x, y, p neue Variable a_1, a_2, a_3 ein, mittelst der Gleichungen

$$p = a_1$$
$$x = a_1 z + a_2$$
$$y = \sqrt{1 - a_1^2}\, z + a_3$$

so erhält man, da hieraus

$$dx = a_1 dz + z da_1 + da_2$$
$$dy = \sqrt{1 - a_1^2}\, dz - \frac{a_1 z da_1}{\sqrt{1 - a_1^2}} + da_3$$

folgt,

$$dz = a_1 (a_1 dz + z da_1 + da_2) + \sqrt{1 - a_1^2} \left(\sqrt{1 - a_1^2}\, dz - \frac{a_1 z da_1}{\sqrt{1 - a_1^2}} + da_3 \right)$$

Reducirt man diese Gleichung, so erhält man:

$$a_1 da_2 + \sqrt{1 - a_1^2}\, da_3 = 0$$

welche Gleichung die gewünschte Form $K_1 d C_1 + K_2 d C_2' = 0$ hat.

Setzt man nun hierein für a_1, a_2, a_3 ihre oben aufgestellten Werthe, so erhält man:

$$pd (x - pz) + \sqrt{1 - p^2}\, d (y - \sqrt{1 - p^2}\, z) = 0$$

welche entwickelt mit der Gleichung

$$dz = pdx + \sqrt{1 - p^2}\, dy$$

übereinstimmt.

Man genügt nun der so eben gefundenen Gleichung:

Erstens, wenn man

$$x - pz = C_1$$
$$y - \sqrt{1 - p^2}\, .\, z = C_2$$

setzt, unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden. Eliminirt man aus beiden Gleichungen das p, so erhält man als Integrale der vorgelegten Gleichung

$$z^2 = (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2$$

Zweitens, wenn man

$$x - pz = \varphi (y - \sqrt{1 - p^2}\, z)$$

und

$$p \varphi' (y - \sqrt{1 - p^2}\, z) + \sqrt{1 - p^2} = 0$$

setzt, und aus diesen beiden Gleichungen das p eliminirt.

3. Beispiel.

Es sei zu integriren die Gleichung (Band 3, Seite 96)

$$z = mpq$$

unter m eine constante Zahl verstanden.

Für diesen Fall ist also

$$\varphi = z - mpq$$

Durch Differenziren erhält man:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dz} = 1, \qquad \frac{d\varphi}{dp} = -mq, \qquad \frac{d\varphi}{dq} = -mp$$

Ferner hat man

$$P = p\frac{d\varphi}{dp} + q\frac{d\varphi}{dq} = -2mpq = -2z$$

Die drei Hilfs-Differentialgleichungen lauten:

$$2z\,dx = mq\,dz$$
$$2z\,dy = mp\,dz$$
$$2z\,dp = p\,dz$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$p^2 = a_1 z$$

woselbst a_1 eine willkürliche Constante bezeichnet. Setzt man hierein für z seinen Werth mpq, so erhält man

$$p^2 = a_1 mpq$$

woraus

$$q = \frac{p}{a_1 m}$$

folgt. Die zwei ersten Hilfs-Gleichungen gestatten nun folgende Schreibweise:

$$2z\,dx = \frac{p}{a_1}\,dz$$
$$2z\,dy = mp\,dz$$

Durch Division erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = a_1 m$$

somit ist:

$$y = a_1 mx + a_2$$

Durch Division der zweiten und dritten Hilfs-Gleichung erhält man:

$$\frac{dy}{dp} = m$$

folglich ist:

$$y = mp + a_3$$

Die drei Integrale der Hilfs-Gleichungen lauten somit:

$$p^2 = a_1 z$$
$$y = a_1 mx + a_2$$
$$y = mp + a_3$$

Hieraus folgen:

$$x = \sqrt{\frac{z}{a_1}} + \frac{a_3}{ma_1} - \frac{a_2}{ma_1} \qquad a_1 = \frac{p^2}{z}$$

$$y = m\sqrt{a_1 z} + a_3 \qquad a_2 = y - \frac{mxp^2}{z}$$

$$p = \sqrt{a_1 z} \qquad a_3 = y - mp$$

Führt man nun in die Gleichung

$$dz = p\,dx + \frac{z}{mp}\,dy$$

für x, y und p neue Variable a_1, a_2, a_3 ein, nämlich

$$x = \sqrt{\frac{z}{a_1}} + \frac{a_3}{m a_1} - \frac{a_2}{m a_1}$$

$$y = m\sqrt{a_1 z} + a_3$$

$$p = \sqrt{a_1 z}$$

so erhält man, da hieraus

$$dx = \frac{a_1 dz - z da_1}{2a_1\sqrt{a_1 z}} + \frac{a_1 da_3 - a_3 da_1}{m a_1^2} - \frac{a_1 da_2 - a_2 da_1}{m a_1^2}$$

$$dy = m\,.\,\frac{a_1 dz + z da_1}{2\sqrt{a_1 z}} + da_3$$

folgt:

$$dz = \sqrt{a_1 z}\left[\frac{a_1 dz - z da_1}{2a_1\sqrt{a_1 z}} + \frac{a_1 da_3 - a_3 da_1 - a_1 da_2 + a_2 da_1}{m a_1^2}\right] +$$

$$+ \frac{z}{m\sqrt{a_1 z}}\left[m \cdot \frac{a_1 dz + z da_1}{2\sqrt{a_1 z}} + da_3\right]$$

Durch Reduction dieser Gleichung erhält man:

$$(a_2 - a_3)\,da_1 - a_1\,da_2 + 2a_1\,da_3 = 0$$

und diese kann auch so geschrieben werden:

$$(a_2 - a_3)\,da_1 + a_1 d\,(2a_3 - a_2) = 0$$

Setzt man hierein für a_1, a_2, a_3 ihre Werthe, so erhält man:

$$\left(mp - \frac{mp^2x}{z}\right) d \cdot \frac{p^2}{z} + \frac{p^2}{z}\, d\left(y - 2\,mp + \frac{mp^2x}{z}\right) = 0$$

Es gestattet daher die Gleichung

$$dz = p\,dx + \frac{z}{mp}\,dy$$

folgende Schreibweise:

$$m\,(z - px)\; d\left(\frac{p^2}{z}\right) + p\,d\left(y - 2\,mp + \frac{mp^2x}{z}\right) = 0$$

Ihr genügt man:

Erstens, wenn

$$\frac{p^2}{z} = C_1$$

$$y - 2\,mp + \frac{mp^2x}{z} = C_2$$

gesetzt wird, unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden.

Der partiellen Differentialgleichung genügt daher jener Werth von z, der sich durch Elimination von p aus diesen beiden Gleichungen ergibt;

Zweitens, wenn

$$\frac{p^2}{z} = \varphi\left(y - 2mp + \frac{mp^2x}{z}\right)$$

und

$$m\,(z - px)\;\varphi'\left(y - 2\,mp + \frac{mp^2x}{z}\right) + p = 0$$

gesetzt wird, und aus beiden Gleichungen das p eliminirt wird;

Drittens, wenn

$$p = 0 \quad \text{und} \quad z - px = 0$$

gesetzt wird, woraus $z = 0$ folgt.

4. Beispiel.

Es sei zu integriren die Gleichung (Band 3, Seite 111)

$$px + qy = mpq$$

unter m eine Constante verstanden.

In diesem Falle ist

$$\varphi = px + qy - mpq$$

Demnach hat man:

$$\frac{d\varphi}{dx} = p, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dp} = x - mq, \quad \frac{d\varphi}{dq} = y - mp$$

und es ist

$$P = p(x - mq) + q(y - mp) = -mpq$$

Die drei Hilfs-Differentialgleichungen lauten:

$$-mpq\,dx = (x - mq)\,dz$$
$$-mpq\,dy = (y - mp)\,dz$$
$$-mpq\,dp = -p\,dz$$

Wird aus ihnen das q mittelst der gegebenen Gleichung hinweggeschafft, so erhält man die Gleichungen:

$$mp^2dx = y\,dz$$
$$mp^2x\,dy = (y - mp)^2\,dz$$
$$mpx\,dp = (mp - y)\,dz$$

durch Division der beiden letzten Gleichungen ergibt sich:

$$p \cdot \frac{dy}{dp} = mp - y$$

woraus sich durch Integration ergibt:

$$py = \frac{m}{2}p^2 + a_1$$

unter a_1 eine willkürliche Constante verstanden.

Setzt man den sich hieraus ergebenden Werth von y in die erste und dritte Hilfs-Gleichung, so erhält man:

$$2mp^3dx = (mp^2 + 2a_1)\,dz$$
$$2mp^2x\,dp = (mp^2 - 2a_1)\,dz$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{p\,dx}{x\,dp} = \frac{mp^2 + 2a_1}{mp^2 - 2a_1}$$

Hier lassen sich die Variablen sondern, und man erhält sodann durch Integration

$$x = \frac{a_2(mp^2 - 2a_1)}{p}$$

unter a_2 eine willkürliche Constante verstanden.

Setzt man die gefundenen Werthe von x und y in die erste Hilfs-Gleichung, so erhält man:

$$2a_2mp(mp^2 + 2a_1)\,dp = (mp^2 + 2a_1)\,dz$$

und diese gibt reducirt:

$$2a_2 mp\,dp = dz$$

woraus

$$a_2 mp^2 = z + a_3$$

folgt. Die Integrale der drei Hilfs-Gleichungen lauten demnach:

$$x = \frac{a_2(mp^2 - 2a_1)}{p}$$

$$y = \frac{mp}{2} + \frac{a_1}{p}$$

$$z = a_2 mp^2 - a_3$$

und hieraus ergeben sich:

$$a_1 = py - \frac{m}{2}p^2$$

$$a_2 = \frac{x}{2(mp-y)}$$

$$a_3 = \frac{mp^2x}{2(mp-y)} - z$$

Führt man nun in die Differentialgleichung

$$dz = p\,dx + \frac{px}{mp-y}dy$$

für x, y und z die neuen Variablen a_1, a_2, a_3 ein, so hat man, da

$$dx = \frac{1}{p}(mp^2da_2 + 2ma_2pdp - 2a_1\,da_2 - 2a_2\,da_1) - \frac{a_2}{p^2}(mp^2 - 2a_1)\,dp$$

$$dy = \frac{m}{2}dp + \frac{1}{p^2}(pda_1 - a_1dp)$$

$$dz = 2ma_2pdp + mp^2da_2 - da_3$$

ist, statt obiger Gleichung folgende:

$$ma_2pdp - da_3 =$$

$$= -2a_1da_2 - 2a_2da_1 + \frac{2a_1a_2dp}{p} + \frac{px}{mp-y}\left(\frac{m}{2}dp + \frac{pda_1 - a_1dp}{p^2}\right)$$

und wenn man auch noch in $\frac{px}{mp-y}$ für x und y ihre oben aufgestellten Werthe setzt:

$$\frac{px}{mp-y} = \frac{a_2(mp^2 - 2a_1)}{\frac{mp}{2} - \frac{a_1}{p}} = 2a_2p$$

so erhält man:

$$da_3 = 2a_1da_2$$

Die Gleichung:

$$dz = pdx + \frac{px}{mp-y}dy$$

geht daher durch Einführung neuer Variablen über in:

$$da_3 = 2a_1\,da_2$$

und wenn man hierein statt a_1, a_2, a_3 ihre Werthe setzt, so sieht man, dass die vorgelegte Gleichung folgende Schreibweise gestattet:

$$d\left[\frac{mp^2x}{mp-y} - 2z\right] = (2py - mp^2)\,d\left[\frac{x}{mp-y}\right]$$

Man genügt daher der vorgelegten partiellen Differentialgleichung:
Erstens für

$$\frac{mp^2x}{mp-y} - 2z = C_1$$
$$\frac{x}{mp-y} = C_2$$

unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden, wenn man nur aus beiden Gleichungen das p eliminirt;

Zweitens für

$$\frac{mp^2x}{mp-y} - 2z = \varphi\left(\frac{x}{mp-y}\right)$$
$$\varphi'\left(\frac{x}{mp-y}\right) = 2py - mp^2$$

wenn man gleichfalls aus diesen beiden Gleichungen das p eliminirt.

5. Beispiel.

Es sei zu integriren die Gleichung (3. Band, Seite 114)

$$\lambda pq = x^2y^2$$

unter λ eine Constante verstanden.

Für diesen Fall ist:

$$\varphi = \lambda pq - x^2y^2$$

und nun hat man:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -2xy^2, \qquad \frac{d\varphi}{dz} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dp} = \lambda q, \qquad \frac{d\varphi}{dq} = \lambda p$$

ferner hat man

$$P = 2\lambda pq$$

Die drei Hilfs-Differentialgleichungen lauten nun:

$$2pdx = dz$$
$$2qdy = dz$$
$$\lambda pq\,dp = xy^2dz$$

Setzt man in diesen Gleichungen für q seinen Werth $\frac{x^2y^2}{\lambda p}$ so gehen selbe über in:

$$2pdx = dz$$
$$2x^2y^2dy = \lambda pdz$$
$$xdp = dz$$

Aus der ersten und dritten folgt:

$$2pdx = xdp$$

und hieraus

$$x^2 = a_1p$$

Setzt man das hieraus gefundene p in die ersten zwei der drei Hilfs-Gleichungen, so erhält man:

$$2x^2dx = a_1dz$$
$$2a_1y^2dy = \lambda dz$$

Durch Integration ergibt sich nun:

$$\tfrac{2}{3} x^3 = a_1 z + a_2$$
$$\tfrac{2}{3} a_1 y^3 = \lambda z + a_3$$

führt man nun in die Gleichung:

$$dz = p\,dx + \frac{x^2 y^2}{\lambda p}\,dy$$

für p, x und y neue Variable a_1, a_2, a_3 ein, mittelst der Gleichungen:

$$x^2 = a_1 p$$
$$\tfrac{2}{3} x^3 = a_1 z + a_2$$
$$\tfrac{2}{3} a_1 y^3 = \lambda z + a_3$$

so hat man, da hieraus zunächst:

$$2x^2 dx = a_1 dz + z\,da_1 + da_2$$
$$2a_1 y^2 dy + \tfrac{2}{3} y^3 da_1 = \lambda dz + da_3$$

folgt, und weiters:

$$dx = \frac{1}{2x^2}(a_1 dz + z\,da_1 + da_2)$$
$$dy = \frac{1}{6a_1 y^2}(3\lambda dz + 3\,da_3 - 2y^3 da_1)$$

für die obenstehende Gleichung, folgende:

$$dz = \frac{p}{2x^2}(a_1 dz + z\,da_1 + da_2) + \frac{x^2}{6a_1 \lambda p}(3\lambda dz + 3da_3 - 2y^3 da_1)$$

oder reducirt:

$$\lambda da_2 - a_3 da_1 + a_1 da_3 = 0$$

Diese Gleichung gestattet folgende Schreibweise:

$$2a_1 da_3 + d(\lambda a_2 - a_1 a_3) = 0$$

Nun ergeben sich aus den Integralen der Hilfs-Differentialgleichungen für a_1, a_2, a_3 folgende Werthe:

$$a_1 = \frac{x^2}{p}$$
$$a_2 = \tfrac{2}{3} x^3 - \frac{x^2 z}{p}$$
$$a_3 = \frac{2x^2 y^3}{3p} - \lambda z$$

Demnach lässt sich die Gleichung

$$dz = p\,dx + \frac{x^2 y^2}{\lambda p}\,dy$$

folgendermassen schreiben:

$$\frac{3x^2}{p}\,d\left[\frac{2x^2 y^3}{3p} - \lambda z\right] + d\left[\lambda x^3 - \frac{x^4 y^3}{p^2}\right] = 0$$

oder noch einfacher:

$$x^2 d\left[\frac{2x^2 y^3}{p} - 3\lambda z\right] + p\,d\left[\lambda x^3 - \frac{x^4 y^3}{p^2}\right] = 0$$

Dieser Gleichung genügt man:

Erstens, wenn man

$$\frac{2x^2y^3}{p} - 3\lambda z = C_1$$
$$\lambda x^3 - \frac{x^4y^3}{p^2} = C_2$$

setzt, und aus beiden Gleichungen p eliminirt, hiebei bedeuten C_1 und C_2 willkürliche Constante;

Zweitens, wenn man

$$\frac{2x^2y^3}{p} - 3\lambda z = \varphi\left(\lambda x^3 - \frac{x^4y^3}{p^2}\right)$$

setzt, und

$$x^2\varphi'\left(\lambda x^3 - \frac{x^4y^3}{p^2}\right) + p = 0$$

und aus beiden Gleichungen das p eliminirt.

6. Beispiel.

Es sei zu integriren die Gleichung

$$z^2(1 + p^2 + q^2) = m^2$$

woselbst m eine Constante bezeichnet.

In diesem Falle ist:

$$\varphi = z^2(1 + p^2 + q^2) - m^2$$

demnach hat man:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 2z(1 + p^2 + q^2), \quad \frac{d\varphi}{dp} = 2pz^2, \quad \frac{d\varphi}{dq} = 2qz^2$$

und

$$P = 2z^2(p^2 + q^2) = 2(m^2 - z^2)$$

Die drei Hilfs-Differentialgleichungen lauten:

$$(m^2 - z^2)\,dx = pz^2\,dz$$
$$(m^2 - z^2)\,dy = qz^2\,dz$$
$$(m^2 - z^2)\,dp = -pz(1 + p^2 + q^2)\,dz$$

Die letzte Gleichung lässt sich vereinfachen, wenn man für q seinen Werth setzt, und geht dadurch über in:

$$\frac{dp}{p} = -m^2 \cdot \frac{dz}{z(m^2 - z^2)}$$

Durch Integration derselben erhält man:

$$p = a_1 \frac{\sqrt{m^2 - z^2}}{z}$$

unter a_1 eine willkürliche Constante verstanden.

Setzt man diesen Werth von p in die erste Hilfs-Gleichung, so erhält man

$$dx = \frac{a_1 z\,dz}{\sqrt{m^2 - z^2}}$$

hieraus folgt:

$$x = -a_1\sqrt{m^2 - z^2} + a_2$$

Die zweite Hilfs-Gleichung geht, wenn man in derselben statt q seinen Werth setzt, über in

$$(m^2 - z^2)\, dy = z \sqrt{m^2 - z^2 - p^2 z^2}\, dz$$

und wenn man hierein für p seinen bereits gefundenen Werth setzt, so erhält man:

$$dy = \sqrt{1 - a_1^2} \cdot \frac{z\,dz}{\sqrt{m^2 - z^2}}$$

woraus durch Integration

$$y = -\sqrt{1 - a_1^2} \cdot \sqrt{m^2 - z^2} + a_3$$

folgt.

Die Integrale der Hilfs-Differentialgleichungen lauten demnach:

$$p = a_1 \cdot \frac{\sqrt{m^2 - z^2}}{z}$$

$$x = -a_1 \sqrt{m^2 - z^2} + a_2$$

$$y = -\sqrt{1 - a_1^2}\sqrt{m^2 - z^2} + a_3$$

Führt man nun in die Gleichung

$$dz = p\,dx + \frac{\sqrt{m^2 - z^2 - p^2 z^2}}{z}\, dy$$

für p, x und y neue Variable a_1, a_2, a_3 ein, so erhält man, da

$$dx = \frac{a_1 z\,dz}{\sqrt{m^2 - z^2}} - \sqrt{m^2 - z^2}\, da_1 + da_2$$

$$dy = \sqrt{1 - a_1^2} \cdot \frac{z\,dz}{\sqrt{m^2 - z^2}} + \sqrt{m^2 - z^2} \cdot \frac{a_1\, da_1}{\sqrt{1 - a_1^2}} + da_3$$

ist,

$$dz = \frac{a_1 \sqrt{m^2 - z^2}}{z}\left(\frac{a_1 z\,dz}{\sqrt{m^2 - z^2}} - \sqrt{m^2 - z^2}\, da_1 + da_2\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{1 - a_1^2}\sqrt{m^2 - z^2}}{z}\left(\sqrt{1 - a_1^2} \cdot \frac{z\,dz}{\sqrt{m^2 - z^2}} + \sqrt{m^2 - z^2} \cdot \frac{a_1\, da_1}{\sqrt{1 - a_1^2}} + da_3\right)$$

und dies führt reducirt auf

$$a_1\, da_2 + \sqrt{1 - a_1^2}\, da_3 = 0$$

Da nun aus den Integralen der drei Hilfs-Differentialgleichungen

$$a_1 = \frac{pz}{\sqrt{m^2 - z^2}}$$

$$a_2 = x + pz$$

$$a_3 = y + \sqrt{m^2 - z^2 - p^2 z^2}$$

folgt, so lässt sich die Gleichung

$$dz = p\,dx + \frac{\sqrt{m^2 - z^2 - p^2 z^2}}{z}\, dy$$

auch so schreiben:

$$\frac{pz}{\sqrt{m^2 - z^2}}\, d(x + pz) + \sqrt{\frac{m^2 - z^2 - p^2 z^2}{m^2 - z^2}}\, d\left(y + \sqrt{m^2 - z^2 - p^2 z^2}\right) = 0$$

oder noch kürzer

$$pz\,d\,(x+pz)+\sqrt{m^2-z^2-p^2z^2}\,d\left(y+\sqrt{m^2-z^2-p^2z^2}\right)=0$$

und dieser genügt man:

Erstens, wenn man

$$x+pz=C_1$$
$$y+\sqrt{m^2-z^2-p^2z^2}=C_2$$

setzt, unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden. Eliminirt man aus beiden Gleichungen das p, so hat man ein Integral der vorgelegten partiellen Differentialgleichung;

Zweitens, wenn man

$$x+pz=\varphi\left(y+\sqrt{m^2-z^2-p^2z^2}\right)$$

ferner

$$pz\,\varphi'\left(y+\sqrt{m^2-z^2-p^2z^2}\right)+\sqrt{m^2-z^2-p^2z^2}=0$$

setzt und aus beiden Gleichungen das p eliminirt; hiebei bedeutet $\varphi\left(y+\sqrt{m^2-z^2-p^2z^2}\right)$ eine willkürliche Function von $y+\sqrt{m^2-z^2-p^2z^2}$

Anmerkung. Einfacher gestaltet sich hier die zweite Auflösung, wenn man q in Rechnung einführt. Es folgt nämlich aus der vorgelegten Gleichung:

$$\frac{\sqrt{m^2-z^2-p^2z^2}}{z}=q$$

Demnach erhält man auch das Integrale der vorgelegten Gleichung, wenn man aus den drei nachstehenden Gleichungen:

$$x+pz=\varphi\,(y+qz)$$
$$p\varphi'\,(y+qz)+q=0$$
$$z^2\,(1+p^2+q^2)=m^2$$

p und q eliminirt.

7. Beispiel.

Es sei

$$mpq=xy$$

unter m eine Constante verstanden; demnach ist

$$\varphi=mpq-xy$$

und man hat:

$$\frac{d\varphi}{dx}=-y,\quad \frac{d\varphi}{dz}=0,\quad \frac{d\varphi}{dp}=mq,\quad \frac{d\varphi}{dq}=mp$$

und sodann

$$P=2xy$$

Die Hilfs-Differentialgleichungen lauten nun:

$$2xy\,dx=mq\,dz$$
$$2xy\,dy=mp\,dz$$
$$2x\,dp=dz$$

Die erste vereinfacht sich, wenn man für q seinen Werth setzt, man erhält nämlich alsdann

$$2pdx = dz$$

Aus dieser und der dritten Gleichung folgt sodann

$$x = a_1 p$$

Dieser Werth von x in die zweite und dritte Hilfs-Gleichung eingeführt, gibt

$$2a_1 y dy = m dz$$
$$2a_1 p dp = dz$$

Durch Integration erhält man:

$$a_1 y^2 = mz + a_2$$
$$a_1 p^2 = z + a_3$$

Aus den drei Hilfs-Differentialgleichungen gehen sonach hervor:

$$x = a_1 p$$
$$a_1 y^2 = mz + a_2$$
$$a_1 p^2 = z + a_3$$

wofür man auch schreiben kann, wenn man x, y und p als Functionen von z ansieht

$$x^2 = a_1 (z + a_3)$$
$$a_1 y^2 = mz + a_2$$
$$a_1 p^2 = z + a_3$$

und

$$a_1 = \frac{x}{p}$$
$$a_2 = \frac{xy^2}{p} - mz$$
$$a_3 = px - z$$

Führt man nun in die Gleichung

$$dz = p dx + \frac{xy}{mp} dy$$

für x, y und p neue Variable a_1, a_2, a_3 ein, indem man aus den Gleichungen

$$2xdx = a_1 (dz + da_3) + (z + a_3) da_1$$
$$2a_1 y dy + y^2 da_1 = m dz + da_2$$

dx und dy bestimmt und einführt, so erhält man:

$$dz = \sqrt{\frac{z+a_3}{a_1}} \cdot \frac{1}{2x} [a_1 dz + a_1 da_3 + z da_1 + a_3 da_1] +$$
$$+ \frac{\sqrt{a_1 (mz + a_2)}}{m} \cdot \frac{1}{2a_1 y} [- y^2 da_1 + m dz + da_2]$$

oder reducirt:

$$dz = \frac{1}{2a_1} (a_1 dz + a_1 da_3 + z da_1 + a_3 da_1) +$$
$$+ \frac{1}{2m} \left(- \frac{mz + a_2}{a_1} da_1 + m dz + da_2\right)$$

und schliesslich

$$(a_3 m - a_2)\, da_1 + a_1\, da_2 + a_1 m\, da_3 = 0$$

was man auch folgendermassen schreiben kann:

$$(a_3 m - a_2)\, da_1 + a_1 d\,(a_2 + m a_3) = 0$$

Setzt man in diese Gleichung für a_1, a_2, a_3 ihre Werthe, so sieht man dass die Gleichung

$$dz = p\,dx + \frac{xy}{mp}\,dy$$

folgende Aufschreibung gestattet:

$$\left(mpx - \frac{xy^2}{p}\right) d\left(\frac{x}{p}\right) + \frac{x}{p}\, d\left(\frac{xy^2}{p} - 2\,mz + mpx\right) = 0$$

oder reducirt:

$$(mp^2 - y^2)\, d\left(\frac{x}{p}\right) + d\left(\frac{xy^2}{p} - 2\,mz + mpx\right) = 0$$

Man genügt dieser Gleichung:

Erstens, wenn man

$$\frac{x}{p} = C_1$$

$$\frac{xy^2}{p} - 2\,mz + mpx = C_2$$

setzt, unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden. Durch Elimination von p gelangt man zu einem Integrale der Gleichung;

Zweitens, wenn man

$$\frac{x}{p} = \varphi\left(\frac{xy^2}{p} - 2\,mz + mpx\right)$$

annimmt, und

$$(mp^2 - y^2)\, \varphi'\left(\frac{xy^2}{p} - 2\,mz + mpx\right) + 1 = 0$$

setzt, und aus beiden Gleichungen das p eliminirt.

Anhang.

Im verflossenen Jahre veröffentlichte ich ein Werk unter dem Titel: »Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen«. In dem Anhange zu diesem Werke habe ich gezeigt, wie der Hochschulprofessor Dr. Anton Winckler meine »Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen«, welche ich in den Jahren 1860 und 1861 publicirt hatte, geplündert, und die Resultate dieses »Geschäftes«, ohne auch nur das geringste nennenswerthe Neue zuzufügen, in den Schriften der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien mitgetheilt hat.

Herr Anton Winckler versucht nun, diese von mir erhobene Anklage in einem eigens zu diesem Zwecke verfassten Pamphlet zu widerlegen.

Auf ehrliche Weise lässt sich das nicht thun, Herr Winckler weiss sich aber Rath, er greift zur Unwahrheit, zur Verdächtigung, zur Verdrehung der Wahrheit, und auf diesem sauberen Wege glaubt er mich widerlegt zu haben.

Ich werde mich nicht eingehend mit diesem neuesten Producte Winckler's beschäftigen, denn das, was ich zu sagen hatte, habe ich bereits in dem Anhange zu meinen »Vorlesungen« gesagt.

Blos einige Bemerkungen möchte ich mir zu machen erlauben.

Was veranlasst denn Herrn Winckler stets auf mein Zerwürfniss mit Professor Petzval, eine Angelegenheit, die vor mehr als 20 Jahren spielte, hinzuweisen?

Herr Winckler weiss ja die Ursache dieses Zerwürfnisses. Ich strebte damals eine Professur für Mathematik an, Petzval stellte sich meinen Bestrebungen hemmend entgegen. Wir kamen hiedurch zu einem Conflicte, der sich immer mehr und mehr steigerte.

Herr Petzval hatte an meinen Arbeiten Ausstellungen, ich an den seinen. Ich sagte, dass die Methode zur Integration der Gleichung:

$$(a_n + b_n x)\, y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x)\, y^{(n-1)} + \,.\,.\, + (a_0 + b_0 x)\, y = 0$$

mittelst der Formel

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\, V du$$

von Laplace herrühre und nicht von ihm, ich sagte ferner, dass die Integration der Gleichung

$$xy^{(n)} - y = 0$$

in Form von unendlichen Reihen, in welchen logarithmische Glieder vorkommen, von mir zuerst gegeben worden sei, indem ich eine Methode, welche Euler gegeben, erweiterte etc.

Soll nun vielleicht dieses Zerwürfniss Herrn Winckler zum Ausplündern meiner Arbeiten berechtigen? Oder zu welchem Geschäfte will denn sonst Herr Winckler dies ausbeuten? Vielleicht dazu, um seine unbedeutende Person neben den gewaltigen genial angelegten Petzval zu stellen?

Was hat Herr Winckler dagegen, dass ich von dem berühmten Euler spreche? Ist vielleicht Euler nicht berühmt? Oder darf man Euler nicht als berühmten Mathematiker feiern, bevor der »berühmte« Herr Dr. Anton Winckler geneigt ist, seine Erlaubniss dazu zu geben?

Was hat Herr Winckler zu nergeln an dem Umstande, dass ich in meinen Werken all' die Mathematiker, die in dem gleichen Gebiete gearbeitet, citirte?

Ich will hier bemerken, dass in meinen 81 Seiten starken »Studien«, 128 Citate; ferner in der ersten Fortsetzung meiner »Studien«, welche 101 Seiten stark ist, 80 Citate vorkommen. Habe ich irgend Jemanden, der in der gleichen Richtung arbeitete, zu nennen unterlassen? Was will also Herr Winckler mit seinen fortwährenden Andichtungen, dass ich auf nicht ehrliche Weise aus anderen Werken entnommen habe?

Herr Winckler hält sich auf, wenn ich von gewissen Integralen, die innerhalb der Integrationsgrenzen durch ∞ gehen, sage, dass sie keinen Sinn haben. Ich kann Herrn Winckler mittheilen, dass die gleiche Ausdrucksweise auch in Riemann vorkömmt, siehe dessen partielle Differentialgleichungen, herausgegeben von Hattendorf im Jahre 1869, Seite 17.

Will der Hochschulprofessor, Herr Dr. Anton Winckler, auch gegen Riemann's Ausdrucksweise polemisiren?

Herr Winckler sagt Seite 21 seines Pamphlets: »Spitzer spricht von sich selbst im plurale maestoso.« Was kümmert das Herrn Winckler? In dem Tone, wie ich spreche, sprechen auch andere Gelehrte, z. B.:

Herr Hofrath Dr. Oscar Schlömilch in seinen mathematischen Abhandlungen, 1850, und zwar Seite 7, 122, 146 etc.;

Ferner Herr Dr. Josef Petzval im ersten Bande seines Werkes: »Integration linearer Differentialgleichungen«, und zwar Seite 33, 283, 302 etc.;

Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, Seite 3, 90, 106 etc.

Will Herr Winckler noch mehr Beispiele?

Wie kömmt es, dass Herr Winckler, Seite 153 seiner im 67. Bande der Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften publicirten Arbeit ein von mir zuerst aufgestelltes Integrale der linearen Differentialgleichung

$$a_2 y'' + a_1 y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

Herrn Petzval zuschreibt? Dieses selbe Integrale spendet Herr Winckler in seinem neuesten Pamphlet in einem Anfalle von Grossmuth nicht wieder Herrn Petzval, sondern Herrn Weiler, um aber Herrn Petzval zu entschädigen, schenkt er ihm eine Arbeit von Lobatto (siehe Seite 54 des Winckler'schen Pamphlets).

Auch Herr Kummer wird von Winckler mit einer meiner Arbeiten beschenkt (siehe §. 87 meiner „Vorlesungen über Differentialgleichungen"), und in diesem Geiste arbeitet Herr Winckler fort und fort.

Herr Winckler gab mir am 22. Jänner 1876 nachstehende Differentialgleichung zu integriren auf:

$$12\,xy'' + (7 - 12\,x)\,y' + 800\,y = 0$$

Diese einzige Aufgabe reicht hin, um die Geisteskraft Winckler's gehörig beurtheilen zu können. Was würde man von einem Volksschullehrer sagen, der das Multipliciren lehrt, und seinen Schülern Aufgaben gibt, in welchen eine 80ziffrige Zahl mit einer 90ziffrigen zu multipliciren ist? Würde man einen solchen Lehrer für zurechnungsfähig halten?

Was würde man von einem Professor sagen, der die Auflösung höherer numerischer Gleichungen lehrt, und der seinen Hörern die Aufgabe stellt, eine numerische Gleichung des 75sten oder 80sten Grades aufzulösen?

Oder wenn ein Professor als Aufgabe stellt, das Integrale

$$\int cos^{80}\,x\,sin^{60}\,x\,dx$$

zu ermitteln?

Bei welchen Studien kam denn Herr Winckler zu der Gleichung

$$12\,xy'' + (7 - 12\,x)\,y' + 800\,y = 0$$

hat er vielleicht ein physikales Problem zu lösen versucht? Oder wie ist er denn sonst zu dieser Gleichung gelangt?

Ich habe Herrn Winckler auf §. 13 meiner „Studien" hingewiesen, Herr Winckler behauptet, dort nichts gefunden zu haben. Aber bin ich dafür verantwortlich, wenn Herrn Winckler's Geisteskräfte nicht hinreichen, um den §. 13 meiner „Studien" zu verstehen?

Herr Winckler zeigt in seinem im Jahre 1878 publicirten Pamphlete auf Seite 21 die Integrale, die er gefunden, von diesen sagt er, dass man durch Trennung des Reellen vom Imaginären im Ganzen sogar vier Lösungen erhält.

Ich habe ihm nachgewiesen, dass seine daselbst angegebenen Integrale falsch sind, und dass die letzte Bemerkung reiner Unsinn ist. Es hat also hier Herr Winckler einen Bock geschossen. Was thut Herr Winckler? In seinem neuesten Pamphlet reitet er „geschäftig" auf diesem Bock herum.

Herr Winckler will mich auch belehren. Da möchte ich mir aber doch die Bemerkung erlauben, dass meiner unbescheidenen Meinung nach Herrn Winckler's geistige Fähigkeiten dazu nicht ausreichend sind, und dass auch, abgesehen von dem, sein Wissen viel zu geringe ist. Herr Winckler möge

sich daher nicht unnöthig bemühen. Er kann ja seine kostbare Zeit zum Verfassen von Plagiaten viel besser verwerthen. Er suche, wie bisher, in meinen Studien irgend ein Integrale einer Differentialgleichung, verwechsle die daselbst vorkommenden Buchstaben mit anderen, schreibe dann noch für x die Zahl $\lambda + \mu\sqrt{-1}$, so hat er gleich eine Entdeckung gemacht, die nirgends in meinen Studien zu finden ist, die auch gar keine lange Zeit, keine schlaflosen Nächte kostet; Herr Winckler kann dann durch Trennung des Reellen vom Imaginären stets sogar vier Lösungen erhalten, und mit diesen die glänzendsten Geschäfte machen.

Was Herr Anton Winckler Seite 41 seines neuesten Pamphletes schreibt, ist auch nichts anderes als baarer Nonsens.

Herr Anton Winckler behauptet, dass das Integrale

$$\int_0^{\infty\sqrt{-1}} \frac{dv}{1-v^2}$$

keinen Sinn habe, aber einen Sinn erhält, wenn man $v = u\sqrt{-1}$ setzt, denn dann erhält man:

$$\sqrt{-1}\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

Nun ist aber

$$\int_0^{n\sqrt{-1}} \frac{dv}{1-v^2} = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+n\sqrt{-1}}{1-n\sqrt{-1}}$$

und

$$\sqrt{-1}\int_0^{n} \frac{du}{1+u^2} = \sqrt{-1}\ arc\ tang\ n$$

Die Gleichheit der beiden Integrale ergibt sich auf nachstehende Weise: Es ist:

$$\log(p \pm q\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\log(p^2+q^2) \pm \sqrt{-1}\ arc\ tang\ \frac{q}{p}$$

hieraus folgt:

$$\log \frac{p+q\sqrt{-1}}{p-q\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\ arc\ tang\ \frac{q}{p}$$

und setzt man hierein:

$$p = 1, \qquad q = n$$

so erhält man:

$$\log \frac{1+n\sqrt{-1}}{1-n\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\ arc\ tang\ n$$

Diese Gleichung findet für jeden Werth von n, also auch für $n = \infty$ statt, hieraus folgt die Gleichheit der beiden von Prof. Winckler hingestellten Integrale.

Ich komme nun zum Schlusse, und wiederhole die Worte, die ich schon einmal, und zwar Seite 179 meiner »Vorlesungen über Integration linearer Differentialgleichungen« fallen liess:

»Die Anklage, welche ich gegen den Hochschulprofessor Dr. Anton Winckler erhoben, halte ich vollständig aufrecht. Herr Dr. Winckler hat in seinen erwähnten Arbeiten die Resultate meiner »Studien«, die ich in den Jahren 1860 und 1861 publicirte, in einer etwas abgeänderten aber missglückten Form in den Druckschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften wiedergegeben, ohne denselben auch nur das geringste nennenswerthe Neue zuzufügen. Nachdem ich mein Prioritätsrecht wahrte, suchte Herr Dr. Winckler durch Verläumdungen und Verdrehungen den Werth meiner Arbeiten herabzusetzen, und als ich ihn des Plagiats beinzichtigte, wendete er einen alten Kunstgriff an, drehte den Spiess um, und stellte mich als Plagiator hin. Ob ihm sein Kniff gelungen, wird die Folge lehren. Fünf Jahre ist die erste Arbeit des Herrn Dr. Winckler alt, in allen Welttheilen sind die Druckschriften der kaiserl. Akademie verbreitet, und noch hat kein Gelehrter von der Arbeit des Herrn Dr. Winckler Notiz genommen, denn sie verdient auch in der That nicht die geringste Beachtung.

Ich habe in meinem an die kaiserl. Akademie der Wissenschaften unterm 9. December 1875 gerichteten Schreiben gebeten, dass dieselbe das Geeignete zur Constatirung meiner Angaben veranlasse, denn ich glaubte, dass die kaiserl. Akademie der Wissenschaften geistiges Eigenthum schütze. Ich habe mich hierin leider geirrt.

So wende ich mich denn an meine Fachgenossen, und namentlich an jene der österreichischen Hochschulen, ihrem Urtheile sehe ich mit Ruhe entgegen, denn die wahren Männer der Wissenschaft haben nicht nur einen regen Sinn für Recht und Gerechtigkeit, sondern sie sind es, welche den Begriff des geistigen Eigenthums auf das Entschiedenste und Energischeste zu wahren wissen, und selbständige Forschung von dem Plagiat scharf zu sondern verstehen.

Ihrem Urtheile vertraue ich meine Sache getrost an, und ich wünsche nichts sehnlicher, als dass Herr Prof. Dr. Anton Winckler zur Herstellung seiner Ehre baldigst das Urtheil der Fachgenossen über diesen Gegenstand provociren möge«.

Was antwortet Herr Winckler hierauf? Er unterwirft sich keinem von mir eingesetzten »Comité«.

Mit solchen Verdrehungen hilft sich Herr Winckler. Schimpfen, Verleumden, seinen Gegner mit Koth bewerfen, ist seine Kampfesweise. In eigener Sache den Richter spielen ist freilich bequemer und sicherer, als sich dem Urtheile der Fachgenossen unterwerfen.

Spitzer.

Noten.

Im verflossenen Jahre (1878) publicirte ich ein Werk unter dem Titel: „Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen". Seite 8 dieses Werkes habe ich die bekannte, von **Euler** herrührende Formel:

$$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

auf sehr schöne Weise abgeleitet. Vor Kurzem las ich **Navier's** Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung mit Zusätzen von **Liouville**, ins Deutsche übersetzt von Theodor **Wittstein** (1854) und fand im zweiten Band, Seite 321, dieselbe Ableitung von **Liouville** gegeben.

Vor zwei Jahren publicirte ich in **Grunert's** Archiv für Mathematik und Physik eine Abhandlung über den Körperinhalt jenes Körpers der begrenzt ist von der Fläche:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2n} = 1$$

Vor Kurzem sah ich, dass **Schlömilch** schon im Jahre 1848 in seinen analytischen Studien, Seite 109, sich die gleiche Aufgabe stellte und löste.

In der zweiten Fortsetzung meiner Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen stellte ich mir die Aufgabe, diejenige lineare Differentialgleichung zu suchen, deren particuläre Integrale die Quadrate sind, von den particulären Integralen der linearen Differentialgleichung

$$X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = 0$$

Liouville stellte sich im Journal de mathematiques, 1839, das allgemeinere Problem aus den beiden Gleichungen

$$y'' = Py\,, \qquad u = y^n$$

das y zu eliminiren.

